高等院校数学课程改革创新系列教材

高等数学(经管数学)(上册)

主编:孔德斌　张成学　李高尚
副主编:韩兆君　刘　婧　王松坤

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

本教材是在建设应用型本科、加强技术技能型人才培养的总体思路下，按照经济管理类专业对高等数学课程教学基本要求，结合应用型本科院校学生基础和教学特点进行编写的。

本教材紧紧围绕应用型人才培养的教学要求，简化理论论证，增强数学语言的形象生动性，突出经管数学和应用数学特色，便于学生理解、掌握、运用。

本教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，各节后均配有相应的习题，书末附有参考答案。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管数学．上册/孔德斌，张成学，李高尚主编．—北京：电子工业出版社，2016.7
ISBN 978-7-121-29033-6

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①孔…②张…③李…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 128716 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：底　波
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：11.75　　字数：298 千字
版　　次：2016 年 7 月第 1 版
印　　次：2016 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册　　定价：26.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换，若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：zhy@phei.com.cn。

前　言

“高等数学”是普通高等院校专、本科各专业普遍开设的一门公共基础课程，不但是培养学生的思维能力的重要方法，也是学生学习专业课的重要前提，更在培养应用型人才方面起着重要作用。在不断适应国家和社会发展要求的办学过程中，很多高校都将培养高素质的应用型、技能型人才作为办学定位，经管类专业对基础课程尤其是数学类课程提出了新的要求，在坚持理论完整的情况下，保证其应用性、实用性。而目前的多数同类教材理论性过强，应用性较少。基于此问题，我们组织多位一线教师，根据多年教学经验，针对应用型人才的培养目标和学生的特点编写了本书。

本书根据数学与统计学教学指导委员会关于“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，参考各经管类专业对该课程知识点的需求情况编写而成。编写时，我们以教育部的教学大纲为准绳，以专业要求为目标，侧重于重要的理论、全面的知识及知识经济中的应用。通过本书的学习使学生系统地获得微积分、无穷级数和常微分方程的基本知识、基本理论和基本方法，培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力及创新能力，为学习后继课程和专业课程奠定必要的数学基础。更重要的是使学生能运用所掌握的高等数学特有的思维方式和处理问题的思想方法去分析、解决现实生活中的各种问题。

本书叙述深入浅出、结构严谨、知识系统、难度适中、突出应用、可读性强，便于教与学，充分体现了经管数学、应用数学的特点，在内容设计方面淡化数学在纯理论方面的教学，增强数学在经济和管理方面的应用教学；在一些数学概念上采用描述性叙述，淡化理论证明，降低概念理解的难度，同时增加部分应用型的例题、习题，使经管类专业学生能更好地应用数学知识理解专业知识，体现经管数学的应用性。

本书适合作为普通高等院校和高等职业院校经济管理类专业教材，也可作为专、本科理工类专业高等数学课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科学校选用。

本书具有以下特点：

1. 在满足教学基本要求前提下，紧紧围绕应用型教学的要求，简化理论推导，增强数学语言的形象生动性。

2. 突出经管数学特色，术语多采用经济类语言，改变现有经管类教材中多采用工科体系语言叙述的形式。

3. 突出应用数学特色，注重应用与理论的统一，增加了数学在经济中应用的例子，培养学生解决实际问题的能力。

4. 突出基本教学与教学辅导相结合的特色。例题解答详细，使学生能理解解题思路，尽量减少学习障碍，每节均配有适量习题，可以帮助学生巩固所学的有关理论和方法。

全书由烟台南山学院孔德斌统稿定稿。全书在编写过程中得到了渤海大学吕志远教

授、山西广播电视大学大同分校王捷副教授的热心指导,并提出了具体的意见和建议,我们在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请专家和读者不吝指教。

编者

2015年12月

目　录

第1章　函数、极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象表现，是微积分研究的基本对象。本章对中学所学过的函数知识做简要的复习与总结，并补充有关的函数知识，如邻域、复合函数、有界函数、基本初等函数和初等函数。

1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念

1．集合

具有某种共同属性的一些对象的全体，称为集合。构成集合的每一个对象称为该集合的元素。通常，用大写字母 **A**，**B**，**C**…等表示集合，用小写字母 $a,b,c\cdots$ 等表示集合的元素。如果 x 是集合 **A** 的元素，则称 x 属于 **A**，记作 $x\in \mathbf{A}$；如果 x 不是集合 **A** 的元素，则称 x 不属于 **A**，记作 $x\notin \mathbf{A}$。

用 **N** 表示自然数集合，用 **Z** 表示整数集合，用 **Q** 表示有理数集合，用 **R** 表示实数集合。

2．集合的表示法

（1）列举法：把集合的元素按任意顺序一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，称为列举法。

例如，由 1，2，3，4，5 组成的集合，可表示为$\{1,2,3,4,5\}$。

（2）描述法：把集合的元素用共同属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称为描述法，即 $\mathbf{A}=\{x|x$ 具有的共同属性$\}$表示集合 **A**。

例如，用$\{x|x^2-4x+3>0\}$表示不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集。

（3）图形法：用一个平面图形表示一个集合，其中图形上的点表示集合的元素，称为图形法。如图 1-1 所示。

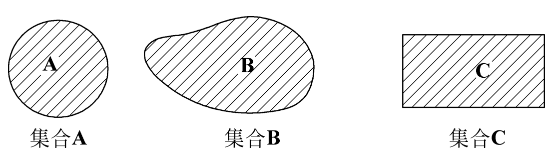


图　1-1

3．集合的类型

（1）有限集：含有有限个元素的集合称为有限集。

(2) 无限集：含有无限个元素的集合称为无限集。

(3) 空集：不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。

(4) 全集：在研究某个问题时，把研究的所有对象构成的集合，称为全集，记为 **I** 或 **U**。

4. 子集、集合的相等

定义 1.1.1 设 **A**,**B** 为两个集合，如果集合 **A** 的元素都是集合 **B** 的元素，则称集合 **A** 为集合 **B** 的子集，如图 1-2 所示，记为 $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{B}\supset\mathbf{A}$，读作 **A** 包含于 **B** 或 **B** 包含 **A**。如果集合 **A** 与集合 **B** 含有相同的元素，则称集合 **A** 与集合 **B** 相等，记为 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$，读作 **A** 等于 **B**。

性质：设 **A**,**B**,**C** 为任意集合，U 为全集，则有

(1) $\varnothing\subset\mathbf{A}\subset\mathbf{U}$

(2) $\mathbf{A}\subset\mathbf{B},\mathbf{B}\subset\mathbf{C}\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A}=\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$

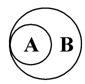


图 1-2

1.1.2 集合的运算

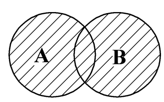
如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有并、交、差、补四种基本运算。

1. 并集

定义 1.1.2 设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称 **A** 与 **B** 中所有元素汇总构成的集合为 **A** 与 **B** 的并集，记为 $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$，读作 **A** 并 **B**，即

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{x\mid x\in\mathbf{A}\text{ 或 }x\in\mathbf{B}\}$$

例如，设 $\mathbf{A}=\{1,2,3,4\}$，$\mathbf{B}=\{2,5,7,8\}$，如图 1-3 所示，则 $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{1,2,3,4,5,7,8\}$。



A∪B

图 1-3

性质：

(1) $\varnothing\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$

(2) $\mathbf{A}\subset(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}),\mathbf{B}\subset(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$

2. 交集

定义 1.1.3 设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称 **A** 与 **B** 中所有公共元素汇总构成的集合为 **A** 与 **B** 的交集，记为 $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$，读作 **A** 交 **B**，即

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x\mid x\in\mathbf{A}\text{ 且 }x\in\mathbf{B}\}$$

例如，设 $\mathbf{A}=\{x|-1<x<3\}$，$\mathbf{B}=\{x|0<x<5\}$，如图 1-4 所示，则 $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x|0<x<3\}$。

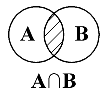


图　1-4

性质：

(1) $\varnothing\cap\mathbf{A}=\varnothing$，$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\mathbf{A}$

(2) $\mathbf{A}\supset(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$，$\mathbf{B}\supset(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$

3. 差集

定义 1.1.4　设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称由集合 **A** 中去掉集合 **B** 的元素后，由剩下的元素构成的集合为 **A** 与 **B** 的差集，如图 1-5 所示，记为 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$，读作 **A** 减 **B**，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{x\mid x\in\mathbf{A}\text{ 且 }x\notin\mathbf{B}\}$$

例如：(1) 设 $\mathbf{A}=\{1,2,3,5,7\}$，$\mathbf{B}=\{2,4,5,6\}$，则 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{1,3,7\}$。

(2) 设 $\mathbf{A}=\{x|0<x<6\}$，$\mathbf{B}=\{x|-2<x<1\}$，则 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{x|1\leqslant x<6\}$。

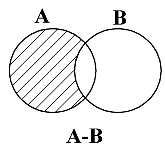


图　1-5

性质：

(1) $\varnothing-\mathbf{A}=\varnothing$，$\mathbf{A}-\varnothing=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}-\mathbf{A}=\varnothing$

(2) $\mathbf{A}-\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$

4. 补集

定义 1.1.5　设 **A** 与 **B** 为两个集合，且 $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$，则称 $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ 为 **A** 关于 **B** 的补集，如图 1-6 所示，记为 $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{C}}$，即

$$\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{C}}=\mathbf{B}-\mathbf{A}=\{x\mid x\in\mathbf{B}\text{ 且 }x\notin\mathbf{A}\}$$

当 $\mathbf{B}=\mathbf{U}$ 时，称 $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{C}}$ 为 **A** 的补集，记为 $\mathbf{A}^{\mathrm{C}}$（或 $\overline{\mathbf{A}}$ 或 $\mathbf{A}'$）。

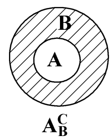


图　1-6

性质：

(1) $\varnothing^{\mathrm{C}}=\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^{\mathrm{C}}=\varnothing$

(2) $\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\cup\mathbf{A}=\mathbf{U}$，$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\cap\mathbf{A}=\varnothing$

(3) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})^{\mathrm{C}}=\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\cap\mathbf{B}^{\mathrm{C}}$，$(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^{\mathrm{C}}=\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\cup\mathbf{B}^{\mathrm{C}}$

5. 集合的运算律

(1) 交换律

(i) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}\cup\mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{B}\cap\mathbf{A}$

(2) 结合律

(i) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cup\mathbf{C}=\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$

(ii) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$

(3) 分配律

(i) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$

(ii) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$

1.1.3 区间、邻域

1. 有限区间

设 a,b 为实数,且 $a<b$。

(1) 开区间:称实数集合 $\{x|a<x<b\}$ 是以 a 为左端点、b 为右端点的开区间,记为 (a,b),如图 1-7 所示,即

$$(a,b)=(x\mid a<x<b)$$

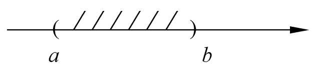


图 1-7

(2) 左开右闭区间:称实数集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 是以 a 为左端点、b 为右端点的左开右闭区间,记为 $(a,b]$,如图 1-8 所示,即

$$(a,b]=(x\mid a<x\leqslant b)$$

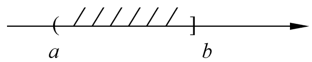


图 1-8

(3) 左闭右开区间:称实数集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 是以 a 为左端点、b 为右端点的左闭右开区间,记为 $[a,b)$,如图 1-9 所示,即

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

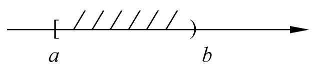


图 1-9

(4) 闭区间:称实数集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 是以 a 为左端点、b 为右端点的闭区间,记为 $[a,b]$,如图 1-10 所示,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

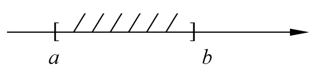


图 1-10

2. 无限区间

(1) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$表示大于 a 的实数集合。

(2) $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$表示大于等于 a 的实数集合。

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$表示小于 b 的实数集合。

(4) $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$表示小于等于 b 的实数集合。

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示实数集合。

注意“$+\infty$”(读作正无穷大)、“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用符号,不能当作数。

3. 邻域

称集合$\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径,如图 1-11 所示。称集合$\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的空心 δ 的邻域,如图 1-12 所示。

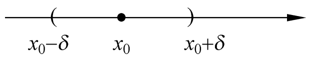


图　1-11

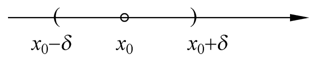


图　1-12

例如:点 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,点 1 的空心 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$。

习题 1.1

1. 用列举法表示下列集合。

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合$\{x|x-1\leqslant 5$ 的整数$\}$。

2. 用集合的描述法表示下列集合。

(1) 大于 5 的所有实数集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=0$ 的交点的集合。

3. 下列集合哪些是空集?

$$\mathbf{A}=\{x\mid x-1=0\},\quad \mathbf{B}=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$$
$$\mathbf{C}=\{x\mid x<-1,\text{且 } x>0\},\quad \mathbf{D}=\{x\mid x>1\text{ 且 } x<5\}$$
$$\mathbf{E}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\text{ 且 } x+y=3,x,y\in\mathbf{R}\}$$

4. 如果 $\mathbf{A}=\{0,1,2\}$,$\mathbf{B}=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些是对的?哪些不对?

$1\in\mathbf{A}$,$0\notin\mathbf{B}$,$\{1\}\in\mathbf{A}$,$1\subset\mathbf{A}$,$\{1\}\subset\mathbf{A}$,$\{0\}\subset\mathbf{B}$,$\mathbf{A}=\mathbf{B}$,$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$,$\varnothing\subset\mathbf{A}$,$\mathbf{A}\subset\mathbf{A}$

5. 如果 $\mathbf{A}$ 是非空集合,下列各个等式哪些是对的?哪些是不对的?

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\varnothing,\mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cup\varnothing=\varnothing,\mathbf{A}\cup\mathbf{U}=\mathbf{U},\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\varnothing=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cap\varnothing=\varnothing,\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}-\mathbf{A}=\varnothing,\mathbf{A}^{\mathrm{C}}=\mathbf{U}$$

6. 设 $\mathbf{A}=\{x|x^2-16<0\}$，$\mathbf{B}=\{x|x^2-4+3\geqslant 0\}$，$\mathbf{U}=\mathbf{R}$，求：

(1) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ (2) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ (3) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ (4) $\mathbf{A}^{\mathrm{C}}$ (5) $\mathbf{B}^{\mathrm{C}}$ (6) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^{\mathrm{C}}$

7. 设 $\mathbf{A}=\{a,b,c\}$，$\mathbf{B}=\{b,e,f\}$，$\mathbf{C}=\{a,c,f\}$，求：

(1) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ (2) $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$ (3) $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}$ (4) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$ (5) $(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})$

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.2.1 设 f 是集合 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 之间的一种对应关系，若对 $\mathbf{X}$ 中的每一个元素 x，通过 f 都有 $\mathbf{Y}$ 中唯一确定的元素 y 与 x 对应，则称 f 为从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的映射，记为

$$f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y} \text{ 或 } y=f(x),x\in\mathbf{X}$$

若 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 都是实数集合，则称映射 f 为函数，称 $\mathbf{X}$ 为 f 的定义域，记为 $\mathbf{D_f}$；称函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in\mathbf{X}\}$ 为 f 的值域，记为 $\mathbf{R_f}$。

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域为 $\mathbf{D_f}$，在平面直角坐标系中，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值，这样，在 $\mathbf{D_f}$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $y=f(x)$ 就确定了一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $\mathbf{D_f}$ 内变动时，点 P 便在平面上移动，所有这些点的集合 $\{P(x,y)|x\in\mathbf{D_f},y=f(x)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的图像。一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像是平面内的一条曲线。

如果两个函数的定义域相同，对应关系相同，则称这两个函数是相同的(或相等的)，否则称这两个函数是不相同的(或不相等的)，至于自变量和因变量用什么记号表示，则没有什么关系。因此，只要定义域相同，对应关系 f 相同，则函数 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 表示同一个函数。

2. 函数的表示法

常用函数的表示法有三种：公式法或解析法、表格法或列表法、图形法或图像法。

下面各举一个例子。

例如，$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$

这是用公式表示 y 是 x 的函数，它的定义域 $\mathbf{D_f}=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$。

例如，某城市一年里各月毛线的零售量(单位：百千克)如表 1-1 所示，它的定义域是 $\mathbf{D_f}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

例如，某河道的断面图形，其深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系由图 1-13 中的曲线所示。

这里，深度 y 是测距 x 的函数是用图形表示的，它的定义域为 $\mathbf{D}_f=[0,b]$。

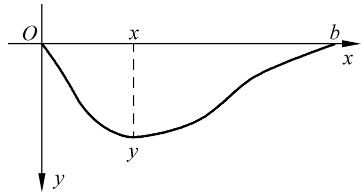


图　1-13

3. 分段函数

定义 1.2.2　设给定一个函数，如果对其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而至少要用两个数学表达式表示，则称这类函数为分段函数。

例如：$y=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ 与 $y=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 是的分段函数。

分段函数的定义域一般都分成若干部分，称每一部分为一段，段与段之间的交接点为分界点或分段点。注意，分段函数是至少用两个数学式子表示同一个函数，而不是表示几个函数。

4. 隐函数

定义 1.2.3　由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数。其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来。例如：由方程 $xe^y-y+1=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系就不能写成 $y=f(x)$（显函数）形式，因而称为隐函数。

1.2.2　函数的几何特性

1. 单调性

定义 1.2.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加。反之，若 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调减少。若 $f(x)$ 在 $\mathbf{D}_f$ 上严格单调增加，则称 $f(x)$ 为严格单调增加函数，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{D}_f$ 上严格单调减少，则称 $f(x)$ 为严格单调减少函数。严格单调增加函数与严格单调减少函数统称为严格单调函数。

在几何上，严格单调增加函数的图形是随着 x 的增加而上升的曲线；严格单调减少函数的图形是随着 x 的增加而下降的曲线。

例如 $y=x^2$ 不是严格单调函数，它在 $(-\infty,0)$ 内严格单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加，$y=x^3$ 是严格单调增加函数，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是严格单调减少函数。

2. 奇偶性

定义 1.2.5　设有函数 $y=f(x)$，若对任意 $x\in\mathbf{D}_f$，$\mathbf{D}_f$ 关于原点对称，都有 $f(-x)=$

$f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数;若对任意的 $x\in \mathbf{D}_f$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数。

在几何上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称。

3. 周期性

定义 1.2.6 设有函数 $y=f(x)$,若存在常数 $\omega>0$,对一切 $x\in \mathbf{D}_f$,有 $f(x+\omega)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,ω 为 $f(x)$的一个周期。

在几何上,周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一个周期后,图形重复出现。

例如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期函数,周期都是 $2k\pi(k\in \mathbf{Z})$,最小正周期都是 2π;$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是周期函数,周期都是 $k\pi(k\in \mathbf{Z})$,最小正周期都是 π。

习惯上,如果一个函数存在最小正周期,则称这个最小正周期为函数的周期。

4. 有界性

定义 1.2.7 设有函数 $y=f(x)$,若存在两个常数 A 和 B,使对一切 $x\in(a,b)$,有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上有界。若 $f(x)$在 $\mathbf{D}_f$上有界,则简称为 $f(x)$有界。

定义 1.2.8 设有函数 $y=f(x)$,若存在常数 $M>0$,使对一切 $x\in(a,b)$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)上有界。

定义 1.2.7 与定义 1.2.8 等价。

例如 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$,$y=C$($C$ 为常数)都是有界函数。

在几何上,有界函数的图形介于两条水平直线 $y=A$ 与 $y=B$ 之间。

例 1.2.1 下列函数有界的有( )。

(A) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (B) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos\dfrac{x}{n}$ (C) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (D) $2\sin 3x+3\cos x-1$

解 $\because \left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$,$\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos\dfrac{x}{n}\right|\leqslant 1$,$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant 1$,

$|2\sin 3x+3\cos x-1|\leqslant 2|\sin 3x|+3|\cos x|+1\leqslant 2+3+1=6$

$\therefore$选(A),(B),(C),(D)。

例 1.2.2 将函数 $y=5-|2x-1|$用分段函数表示。

解 $\mathbf{D}_f=(-\infty,+\infty)$,

令$|2x-1|=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore y=5-|2x-1|=\begin{cases}5-(1-2x) & x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 5-(2x-1) & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4+2x & x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 6-2x & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

1.2.3　复合函数和反函数

1. 复合函数

定义 1.2.9　设函数 $y=f(u)$的定义域为 $\mathbf{D_f}$，$u=g(x)$的值域为 $\mathbf{R_g}$，若 $\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}\neq\varnothing$，则称 $y=f[g(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数。其中 $y=f(u)$叫作外函数，$u=g(x)$叫作内函数，u 叫作中间变量。

例 1.2.3　已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=a-x^2$。讨论当 $a=1$，$a=-1$ 时，$y=f[g(x)]$是不是复合函数?

解　(1) $a=1$ 时，有

$$y=\sqrt{u},\quad u=1-x^2$$
$$\mathbf{D_f}=[0,+\infty],\quad \mathbf{R_g}=(-\infty,1]$$
$$\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}=[0,1]\neq\varnothing$$

所以，$y=f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}$是复合函数。

令 $1-x^2\geqslant 0$，得$|x|\leqslant 1$，于是复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$。

(2) $a=-1$ 时，有

$$y=\sqrt{u},\quad u=-1-x^2,$$
$$\mathbf{D_f}=[0,+\infty],\quad \mathbf{R_g}=(-\infty,-1]$$
$$\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}=\varnothing$$

所以 $y=f[g(x)]=\sqrt{-1-x^2}$不是复合函数。

例 1.2.4　(1) 如果 $y=\sqrt{u}$，$u=2+v^2$，$v=\cos x$，将 y 表示为 x 的函数；

(2) 如果 $f(x)=3x^3+2x$，$g(x)=\lg(1+x)$，求 $f[g(x)]$。

解　(1) $y=\sqrt{2+v^2}=\sqrt{2+\cos^2 x}$

(2) $f[g(x)]=f[\lg(1+x)]=3\lg^3(1+x)+2\lg(1+x)$

例 1.2.5　分析下列复合函数的复合结构。

(1) $y=\sin e^{x^2+x}$　　　(2) $y=\ln\cos\sqrt{x^2+1}$

解　(1) 最外层是 $y=\sin u$，第二层是 $u=e^v$，内层是 $v=x^2+x$，这里的 u 和 v 都是中间变量。

(2) 最外层是 $y=\ln u$，第二层是 $u=\cos v$，第三层是 $v=\sqrt{w}$，最内层是 $w=x^2+1$，这里的 u，v 和 w 都是中间变量。

评注　分析复合函数 $y=f[g(x)]$的复合结构，先写出最外层函数 $y=f(u)$，后写出内层函数 $u=g(x)$，若内层函数仍为复合函数，要继续分解，直到最后一个函数是由基本初等函数与常数函数经过有限次四则运算所得到的函数为止。

2. 反函数

(1) 反函数概念

定义 1.2.10　设 $y=f(x)$为给定的一个函数，如果对其值域 $\mathbf{R_f}$中的任意一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$在其定义域 $\mathbf{D_f}$中确定唯一的一个 x 与它对应，则得到一个定义

在 $\mathbf{R_f}$上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数,称此函数为 $y=f(x)$的反函数,记为

$$f^{-1}: \mathbf{R_f} \to \mathbf{D_f} \quad 或 \quad x=f^{-1}(y)$$

习惯上,又把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$,此时其定义域 $\mathbf{D_{f^{-1}}}=\mathbf{R_f}$,值域 $\mathbf{R_{f^{-1}}}=\mathbf{D_f}$。

$y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(2) 反函数存在定理

定理 1.2.1 若函数 $y=f(x)$是严格单调增加(或减少)的,则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,且此反函数也是严格单调增加(或减少)的。

例如 $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$是严格单调增加函数,因此它有反函数 $y=\sqrt[3]{x}, x\in(-\infty,+\infty)$,且 $y=\sqrt[3]{x}$也是严格单调增加函数。

例 1.2.6 求下列函数的反函数。

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ (2) $y=1+\ln(3x+2)$

解 (1) 因为$(x-2)y=x+2 \Rightarrow xy-x=2y+2 \Rightarrow x=\dfrac{2y+2}{y-1}$

所以反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$。

(2) 因为 $\ln(3x+2)=y-1 \Rightarrow e^{\ln(3x+2)}=e^{y-1} \Rightarrow 3x+2=e^{y-1} \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}(e^{y-1}-2)$

所以反函数为 $y=\dfrac{1}{3}(e^{x-1}-2)$。

评注 求 $y=f(x)$的反函数:(1)以 x 为未知数解方程 $y=f(x)$得 $x=f^{-1}(y)$;(2)反函数为 $y=f^{-1}(x)$。

例 1.2.7 求下列函数的反函数。

(1) $y=x^2-1, x\geqslant 0$ (2) $y=\sqrt{x}-1, x\geqslant 1$

解 (1) $x^2=y+1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y+1}$,因为 $x\geqslant 0$,所以 $x=\sqrt{y+1}$

又因为 $y=x^2-1, x\geqslant 0$,所以 $y\geqslant -1$

因此反函数为 $y=\sqrt{x+1}, x\geqslant -1$。

(2) $\sqrt{x}=y+1 \Rightarrow x=(y+1)^2$,因为 $y=\sqrt{x}-1, x\geqslant 1$,所以 $y\geqslant 0$

因此反函数为 $y=(x+1)^2, x\geqslant 0$。

评注 在某个定义域上求 $y=f(x)$的反函数:(1)以 x 为未知数解方程 $y=f(x)$得 $x=f^{-1}(y)$;(2)由 $y=f(x)$的定义域求出 y 的值域;(3)反函数为 $y=f^{-1}(x)$,x 在某个定义域上。

3. 反三角函数

(1) 反正弦函数

定义 1.2.11 函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫作反正弦函数,记为 $y=\arcsin x$,它的定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。

定理 1.2.2　① $\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1], \arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

② $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上是严格单调增加，有界，奇函数。

例 1.2.8　常用的反正弦函数值有：

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}\qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 0=0\qquad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

(2) 反余弦函数

定义 1.2.12　函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数叫作反余弦函数，记为 $y=\arccos x$，它的定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$。

定理 1.2.3　① $\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1], \arccos x\in[0,\pi]$；

② $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上是严格单调减少且有界函数；

③ $\arccos(-x)=\pi-\arccos x, x\in[-1,1]$。

例 1.2.9　常用的反余弦函数值有：

$$\arccos(-1)=\pi\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}\qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}\qquad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\arccos 1=0$$

(3) 反正切函数

定义 1.2.13　函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数叫作反正切函数，记为 $y=\arctan x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

定理 1.2.4　① $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

② $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加，有界，奇函数。

例 1.2.10　常用的反正切函数值有：

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}\arctan 0=0$$

$$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

(4) 反余切函数

定义 1.2.14 函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数叫作反余切函数,记为 $y=\operatorname{arccot}x$,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $(0,\pi)$。

定理 1.2.5 ① $\cot(\operatorname{arccot}x)=x,x\in(-\infty,+\infty),\operatorname{arccot}x\in(0,\pi)$;

② $y=\operatorname{arccot}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调减少,有界。

$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}x,x\in(-\infty,+\infty)$。

例 1.2.11 常用的反余切函数值有:

$$\operatorname{arccot}0=\frac{\pi}{2}\qquad\operatorname{arccot}1=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}\qquad\operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$$

1.2.4 初等函数

1. 基本初等函数

定义 1.2.15 把下列五类函数:

幂函数 $y=x^a$(a 为任意实数)

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

对数函数 $y=\log a^x(a>0,a\neq1)$

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot}x$

统称为基本初等函数。

例 1.2.12 下列函数中是基本初等函数的有( )。

(A) $y=\sqrt{x}$ (B) $y=2x+1$ (C) $y=\operatorname{sine}^x$ (D) $y=\ln\sin x$

(E) $y=3^x$ (F) $y=1+x+x^2$

解 $y=\sqrt{x}$ 为幂函数,$y=3^x$ 为指数函数,选(A),(E)。

注意:复合函数不是基本初等函数。

2. 初等函数

定义 1.2.16 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或复合运算而得到的函数统称为初等函数。

由定义易知,基本初等函数是初等函数。初等函数是能用一个数学表达式表示的函数,一般地,分段函数与绝对值函数往往不是初等函数。

例 1.2.13 下列函数是初等函数的有( )。

(A) $y=\ln x+\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1+\sin x}}$ (B) $y=x$

(C) $y=C$(C 为常数) (D) $y=\sin\ln(x^2+1)$

(E) $y=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ 2\cos x & x\leqslant 0 \end{cases}$　　(G) $y=\ln|x|$

解　依定义，选(A)，(B)，(C)，(D)。

微积分的研究对象是函数，主要是研究初等函数，对于非初等函数，分段函数与绝对值函数是两类重要例子，在学习中要引起足够的重视。

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}+\ln(x+1)(4-x)$

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+3^{\arccos x}+\dfrac{1}{x}$

2. 求下列函数的定义域。

(1) $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x<1 \\ x^2+1 & 1<x<2 \\ x-1 & 2\leqslant x<10 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1 \\ x^2-1 & 1<|x|<4 \end{cases}$

3. 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域。

(1) $f(x^2)$　　(2) $f(\sin x)$　　(3) $f(x+a)(a>0)$　　(4) $f\left(\lg\dfrac{1}{x}\right)$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2 & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，求下列函数的定义域。

(1) $f(2x)$　　(2) $f(x-2)$　(3) $g(x)=f(2x)+f(x-2)$

5. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$，$f\left[f\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$。

6. 设 $g(x)=\begin{cases} 2^x & 1<x<0 \\ 2 & 0\leqslant x<1 \\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$，求 $g(3)$，$g(2)$，$g(0)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$。

7. 设 $f(x)=\begin{cases} |\sin x| & |x|>1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$，求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。

8. 设 $f(x)=\begin{cases} x-3 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2+1 & 1<x\leqslant 5 \end{cases}$，求 $f(x+1)$。

9. 将函数 $y=|3x+1|+2$ 用分段函数表示。

10. (1) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}$,求 $f(x)$;

(2) 设 $f(e^{-x})=-e^{-2x}$,求 $f(x)$;

(3) 设 $f(x+4)=\begin{cases} x^2+4 & 1<x\leqslant 4 \\ \frac{1}{x-2} & 2<x<4 \end{cases}$,求 $f(x)$;

(4) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\ (x<0)$,求 $f(x)$。

11. 求下列函数的反函数。

(1) $y=\frac{e^x}{e^x+1}$　　　　(2) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$

(3) $y=1+\lg(x+2)$　　　　(4) $y=3^{2x+5}$

(5) $y=2\sin 3x$　　　　(6) $y=\frac{x+2}{x-2}$

12. 求下列函数的反函数。

(1) $y=x^2, x\leqslant 0$　　　　(2) $y=-\sqrt[3]{x}, x\geqslant 0$

(3) $y=\sqrt[3]{x}-1, x\leqslant 0$　　　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$

13. 求 $y=\begin{cases} x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2 & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数。

14. 分别就 $a=2, a=\frac{1}{2}, a=-2$ 时讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数,如果是复合函数,求其定义域。

15. 设 $f(x)=2x^2+x, g(x)=e^{x-1}$,求 $f[g(x)], g[f(x)]$。

16. 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\sin^3 x^2$　　　　(2) $y=\ln\sin(1-x)$

微积分的研究对象是函数,使用的基本方法是极限的方法。下面几节是整个微积分学的基础,主要讨论极限的概念与性质、极限的计算和函数的连续性。

1.3　数列的极限

1.3.1　数列

1. 数列定义

定义 1.3.1　无穷多个数按照一定的次序排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列,记为 $\{x_n\}$,或者说,数列是定义在自然数集合上的函数,

$$x_n = f(n) \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 也称为数列的通项或一般项。

例 1.3.1　数列的例子。

(1) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

(4) $\{2n\}$：$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(5) $\{(-1)^{n-1}\}$：$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

2. 单调数列

定义 1.3.2　设$\{x_n\}$为数列，若

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots$$

则称$\{x_n\}$为单调增加数列；若

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots$$

则称$\{x_n\}$为单调减少数列。单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列。

例如：例 1.3.1 中的(1)和(4)为单调增加数列，(2)和(3)为单调减少数列，(5)不是单调数列。

3. 有界数列

定义 1.3.3　设$\{x_n\}$为数列，若存在 $M>0$，使得对一切自然数 n，有$|x_n|\leqslant M$，则称$\{x_n\}$为有界数列。若这样的 M 不存在，则称$\{x_n\}$为无界数列。

例如：例 1.3.1 中的(1)(2)(3)(5)为有界数列，(4)为无界数列。

若数列$\{x_n\}$既是单调数列，又是有界数列，则称$\{x_n\}$为单调有界数列。例如：例 1.3.1 中的(1)(2)(3)为单调有界数列。

1.3.2　数列的极限

数列一般项 $x_n=f(n)$是随着 n 的变化而变化的，数列的极限就是研究当 n 取自然数无限增大时，x_n的变化趋势是什么。

观察例 1.3.1，我们看出，当 n 取自然数无限增大时，各数列的变化趋势各异：数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，当 n 无限增大时，$x_n=\frac{n}{n+1}$单调增加，无限地接近于常数 1；数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$与$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，当 n 无限增大时，$x_n=\frac{1}{n}$与 $x_n=\frac{1}{2^n}$单调减少，无限地接近于常数 0；数列$\{2n\}$，当 n 无限增大时，$x_n=2n$ 单调增加且无限增大；数列$\{(-1)^{n-1}\}$，当 n 无限增大时，$x_n=(-1)^{(n-1)}$总在 1 与-1 两个数上下跳跃，不趋近于一个常数。

纵观例 1.3.1 中的这五个数列，前三个数列，当 n 取自然数无限增大时，x_n无限地趋于某一个确定的常数；后两个数列，当 n 取自然数无限增大时，x_n都不无限地趋于某个确定的常数。前三个数列的这种共同特点就是数列极限的概念。

定义 1.3.4　设$\{x_n\}$为数列，A 为常数。若当 n 取自然数无限增大时，x_n无限地接近于常数 A，则称当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限为 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A \quad 或 \quad x_n = A(n\to\infty)$$

亦称数列$\{x_n\}$收敛，即当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$收敛于 A；否则，就称数列$\{x_n\}$没有极限或发散。

根据数列极限定义,例 1.3.1 中各数列的极限:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}2n$ 不存在,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在。

例 1.3.2 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n(|q|<1)$

解 按照定义,易知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$

由(1),(2),(3),容易推出

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n(|q|<1)=0$

例 1.3.3 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=1$。

评注 求数列极限时,就是求当 $n\to\infty$时,通项 a_n是否无限趋向于某一个确定的常数 A。

定理 设数列$\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{2n-1},x_{2n},\cdots$$

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B$ 都存在且相等,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=B$;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$与$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$至少有一个不存在,或虽都存在但不相等,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在。

例 1.3.4 设数列$\{x_n\}$:

$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2^n},\cdots$求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

例 1.3.5 求$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n+1}$。

解 当 n 取奇数时,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

当 n 取偶数时

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n+1}$不存在。

1.3.3　收敛数列的主要性质

性质 1(保号性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)。

性质 2(不等式性质)　如果数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

性质 3(有界性)　如果数列 x_n 收敛,那么数列 x_n 必有界。

习题 1.3

1. 下列数列极限存在的有(　　)。

(A) 10,10,10,10,…　　(B) $\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5}\cdots$

(C) $x_n=\begin{cases}\dfrac{n}{1+n} & n\text{ 是奇数}\\ \dfrac{n}{1-n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　(D) $x_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n} & n\text{ 是奇数}\\ (-1)^n & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

2. 下列数列收敛的有(　　)。

(A) 0.9,0.99,0.999,0.9999,…

(B) $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\cdots$

(C) $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$

(D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{2^n+1}{2^n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

3. 下列数列收敛于 0 的有(　　)。

(A) $\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},0,\cdots$

(B) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots$

(C) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$

(D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{n+1} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

4. 数列 1,0,−1,1,0,−1,…(　　)。

(A) 收敛于-1　　(B) 收敛于 1　　(C) 收敛于 0　　(D) 发散

5. 当 $n\to\infty$ 时,数列极限不存在的是(　　)。

(A) $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},\cdots$

(B) $1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\frac{1}{7},\cdots$

(C) $1+1,\frac{1}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{3}+\frac{5}{9},\frac{1}{4}+\frac{7}{16},\cdots,\frac{1}{n}+\frac{2n-1}{n^2},\cdots$

(D) $x_n=\begin{cases}\frac{2^n-1}{2^n} & n\text{ 为奇数}\\ \frac{2^n+1}{2^n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

1.4　函数的极限

函数 $y=f(x)$随着自变量 x 的变化而变化,函数的极限是研究,当 x 按照某种给定的方式先变化时,$f(x)$的变化趋势是什么。

按自变量趋于无穷和自变量趋于定数的两类变化方式,函数的极限分为两类,下面分别讨论这两类极限。

1.4.1　自变量趋于无穷时,函数的极限

1. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$的极限

例 1.4.1　设函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

如图 1-14 所示,考察当 x 无限增大时,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的变化趋势:当 x 无限增大时,即 x 沿着 x 轴一直向右边跑下去时,曲线 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在 x 轴的右边无限接近子 x 轴,即纵坐标 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$无限地接近于常数 0,这时,我们就称当 $x\to+\infty$时,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的极限为 0。

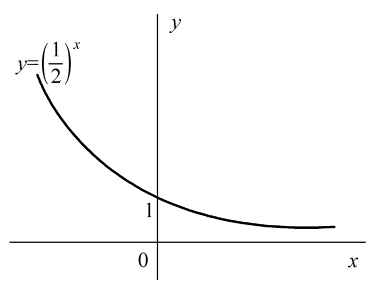


图　1-14

定义 1.4.1　设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义,A 为常数。若当 x 无限增大时,$f(x)$无限地接近于常数 A,则称当 $x\to+\infty$时,$f(x)$的极限为 A,记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to +\infty)$$

依定义有 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$。

2. 当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1.4.2　设函数 $y=2^x$，如图 1-15 所示，考察当 x 无限减小时，$y=2^x$ 的变化趋势：当 x 无限减小时，即 x 沿着 x 轴一直向左边跑下去，曲线 $y=2^x$ 在 x 轴的左边无限地接近于 x 轴，即纵坐标 $y=2^x$ 无限地接近于常数 0。这时，我们就称当 $x \to -\infty$ 时，$y=2^x$ 的极限为 0。

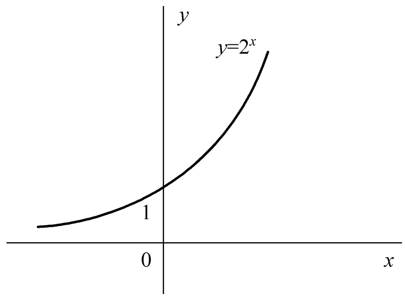


图　1-15

定义 1.4.2　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 内有定义，A 为常数。若当 x 无限地减小时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to -\infty)$$

依定义有 $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$。

3. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1.4.3　设函数 $y=1+\frac{1}{x}$，如图 1-16 所示，考察当 $|x|$ 无限增大时，$y=1+\frac{1}{x}$ 的变化趋势：当 $|x|$ 无限增大时，即 x 沿着 x 轴，向左、右两边跑下去时，曲线 $y=1+\frac{1}{x}$ 在直线 $y=1$ 的两边都无限地接近于直线 $y=1$，即纵坐标 $y=1+\frac{1}{x}$ 无限接近于常数 1。这时，我们称当 $x \to \infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x}$ 的极限为 1。

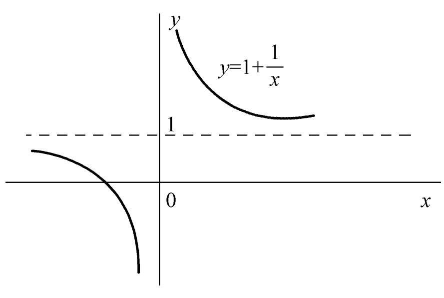


图　1-16

定义 1.4.3 设函数 $f(x)$在$(-\infty,b)\cup(a,+\infty)$内有定义,$A$ 为常数。若当$|x|$无限增大时,$f(x)$无限地接近于常数 A,则称当 $x\to\infty$时,$f(x)$的极限为 A,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

依定义有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$。

4. 三种极限的关系

当 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时 $f(x)$的极限称为单边极限,当 $x\to\infty$时 $f(x)$的极限为双边极限,依定义,容易得到双边极限与单边极限的关系。

定理 1.4.1 设 A 为常数,则有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

推论 1 若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在但不相等,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在。

推论 2 若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$至少有一个不存在,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在。

根据三种极限的关系,我们可以用单边极限确定双边极限。

例 1.4.4 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

解 如图 1-17 所示,因为 $y=\arctan x$ 严格单调增加,且

$$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\quad -\infty<x<+\infty$$

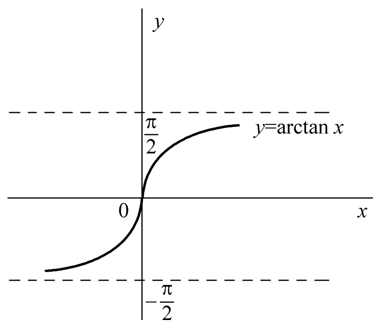


图 1-17

所以当 $x\to+\infty$时,$y=\arctan x\to\dfrac{\pi}{2}$,

当 $x\to-\infty$时,$y=\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$,

依定义:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

依推论 1,(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

例 1.4.5 依定义,易得

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在。

例 1.4.6　依定义，易知下列极限均不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

例 1.4.7　设 C 为常数，依定义，易得

$$\lim_{x\to-\infty} C = C,\ \lim_{x\to+\infty} C = C,\ \lim_{x\to\infty} C = C$$

1.4.2　自变量趋于常数时，函数的极限

1. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限

例 1.4.8　设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，考察当 x 从 1 的两侧无限地接近于 1 且不等于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，见表 1-2。

表　1-2

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.9999	……1.000001	1.01	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.9999	……2.000001	2.01	2.25	2.5

从表中看出，当 x 趋近于 1 时，$f(x)$ 无限地趋近于 2。这时，我们就称当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2。

定义 1.4.4　设 $f(x)$ 在 x_0 的两侧有定义，A 为常数。若当 x 从 x_0 的两侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

上面极限称为双侧极限。

依定义有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

例 1.4.9　设 $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

解　由图 1-18，容易观察到，当 x 从 0 的左侧趋于 0 时，$f(x)$ 趋于 1；当 x 从 0 的右侧趋于 0 时，$f(x)$ 趋于 0，因此，当 x 从 0 的两侧趋于 0 时，$f(x)$ 不能趋于一个常数，依定义 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

在例 1.4.9 中，当 x 从 0 的左侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限地接近 1，这时，我们说当 $x\to 0^-$ 时，$f(x)$ 的左极限为 1；当 x 从 0 的右侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限接近于 0，这时，我们说当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 的右极限为 0。

2. 当 $x\to x_0^-$（或 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 的左（或右）极限

定义 1.4.5　设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧有定义，A 为常数，若当 x 从 x_0 的左侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 的左极限为 A，记为

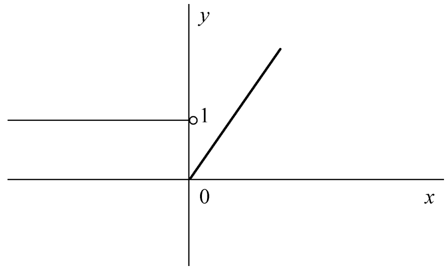


图 1-18

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \quad f(x) \to A(x \to x_0^-) \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

定义 1.4.6 设 $f(x)$在 x_0 的右侧有定义,A 为常数,若当 x 从 x_0 的右侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时,$f(x)$无限地接近于常数 A,则称当 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$的右极限为 A,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A, \quad f(x) \to A(x \to x_0^+) \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

左极限与右极限统称为单侧极限。

3. 三种极限的关系

依定义,易知双侧极限与单侧极限的关系如下面定理与推论所示。

定理 1.4.2 设 A 为常数,则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

推论 1 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在但不相等,则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

推论 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$至少有一个不存在,则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

由三种极限的关系,我们可以利用单侧极限研究双侧极限。

例 1.4.10 (1) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ \sqrt{2x+1} & x > 0 \end{cases}$,求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leqslant 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$,求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$。

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{2x+1} = 1$,$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$,所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$。

(2) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1) = -1$,$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$,因此 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$,所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在。

评注 求分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leqslant x_0 \\ h(x) & x > x_0 \end{cases}$ 或 $f(x) = \begin{cases} g(x) & x < x_0 \\ h(x) & x \geqslant x_0 \end{cases}$ 或 $f(x) = \begin{cases} g(x) & x < x_0 \\ A & x = x_0 \\ h(x) & x \geqslant x_0 \end{cases}$ 在分界点 x_0 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,则有如下步骤:

(1) 求左、右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$,$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$;

(2) 利用双侧极限存在与单侧极限的关系,确定极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$。

例 1.4.11　(1) 已知 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；(2)已知 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$。

解　(1) 设 $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$，则

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

(2) 设 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}=\begin{cases}-\frac{\sin x}{x} & -\pi<x<0\\ \frac{\sin x}{x} & 0<x<\pi\end{cases}$，则

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

评注　求绝对值函数的极限，(1)化绝对值函数为分段函数；(2)按分段函数的极限求极限。

1.4.3　极限的性质

性质 1(局部保号性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在 x_0 的某个邻域，当 x 在该领域内($x\neq x_0$)时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

性质 2(不等式性质)　如果 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

性质 3(有界性)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在 x_0 的某个邻域，$f(x)$在这个邻域($x\neq x_0$)内有界。

记“$n\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$”为“·”，则七种极限可记为

$$\lim_{\bullet}f(x)=A$$

习题 1.4

1. $f(x)$在 x_0 点有定义，是 $f(x)$在 x_0 点有极限的(　　)。

(A) 必要条件　　(B) 充分条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

2. $f(x)$在 x_0 点的左、右极限都存在且相等，是 $f(x)$在 x_0 点有极限的(　　)。

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 无关条件

3. 当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$有极限，是数列$\{x_n\}$有界的(　　)。

(A) 必要条件　　(B) 充分条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

4. 下列极限不存在的有(　　)。

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$　　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan x$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\text{arccot}\, x$

1.5 无穷小量与无穷大量

1.5.1 无穷小量

1. 无穷小量定义

定义 1.5.1 若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$则称当 · 时，$f(x)$是无穷小量，简称为无穷小，即以零为极限的函数称为无穷小量。

例如：(1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore$当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}$是无穷小量。

(2) $\because \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

$\therefore$当 $x\to+\infty$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$是无穷小量。

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

$\therefore$当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小量。

(4) $\because \lim\limits_{x\to 1}x^2\neq 0$

$\therefore$当 $x\to 1$ 时，x^2 不是无穷小量。

2. 无穷小量与有极限变量的关系

定理 1.5.1 设 A 为常数，则有

$$\lim_{\bullet} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{\bullet}[f(x)-A]=0$$

3. 无穷小量的性质

性质 1 无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量。即：若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$g(x)$有界，则有

$$\lim_{\bullet}[f(x)g(x)]=0$$

例如(1) $\because \lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\sin\frac{1}{x}$有界，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。

(2) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$\sin x$ 有界，

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0$。

性质 2　两个无穷小量的代数和仍为无穷小量。即，若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$，则$\lim\limits_{\bullet}[f(x)\pm g(x)]=0$。

性质 3　两个无穷小量的乘积仍为无穷小量。即，若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$，则$\lim\limits_{\bullet}[f(x)g(x)]=0$。

4. 无穷小量的阶

无穷小量虽然都是趋于 0 的变量，但不同的无穷小量趋于 0 的速度却不一定相同，有时可能差别很大。

首先比较三个无穷小量 $x,2x,x^2(x\to 0)$趋于 0 的速度，见表 1-3。

表　1-3

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	…	→	0
$2x$	2	1	0.2	0.02	0.002	…	→	0
x^2	1	0.25	0.01	0.0001	0.000001	…	→	0

由表 1-3 可以看出，这三个无穷小量趋于 0 的速度有显著差异，x^2 比 $2x$ 和 x 趋于 0 的速度快，x 与 $2x$ 趋于 0 的速度差不多。这只是直观描述，何谓“快”，何谓“差不多”，需要给出定量的定义。

定义 1.5.2　设$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$ 且 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，

(1) 若 $k\neq 0$，则称 $f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷小；

(2) 若 $k=0$，则称 $f(x)$比 $g(x)$是高阶无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))$；

(3) 若 $k=1$，则称 $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小，记为 $f(x)\sim g(x)$；

(4) 若 $k=\infty$，则称 $f(x)$比 $g(x)$是低阶无穷小。

例如：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以，当 $x\to 0$ 时，x^2 比 x 是高价无穷小，可记为 $x^2=o(x)$；反之，当 $x\to 0$，x 比 x^2 是低阶无穷小。

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2=2\neq 0$，所以，当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小。

1.5.2　无穷大量

1. 正无穷大量

例 1.5.1　观察函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$无限地增大，我们称当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$的极限为正无穷大；或称当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$是无穷大量。

定义 1.5.3　设 $f(x)$在 x_0 点的两侧有定义，若当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$无限地增大，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的极限为正无穷大，或称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是正无穷大量，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

2. 负无穷大量

例 1.5.2 观察函数 $y=-\dfrac{1}{x^2}$,当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$无限地减小,我们称当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$的极限为负无穷大;或称当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$为负无穷大量。

定义 1.5.4 设 $f(x)$在 x_0 的两侧有定义,若当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$无限地减小,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$的极限为负无穷大;或称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$为负无穷大量,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

3. 无穷大量

例 1.5.3 观察函数 $y=\dfrac{1}{x^3}$,当 $x \to 0$ 时,$|y|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$无限地增大,我们称当 $x \to 0$ 时,$y=\dfrac{1}{x^3}$的极限为无穷大;或称当 $x \to 0$ 时,$y=\dfrac{1}{x^3}$为无穷大量。

定义 1.5.5 设 $f(x)$在 x_0 的两侧有定义,若当 $x \to x_0$ 时,$|f(x)|$无限地增大,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$的极限为无穷大;或称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$为无穷大量,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

依定义有

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = \infty$$

对于其他的极限过程,我们有类似的定义,用记号表示如下:

(1) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$当 · 时,$f(x)$无限地增大;

(2) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$当 · 时,$f(x)$无限地减小;

(3) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=\infty \Leftrightarrow$当 · 时,$|f(x)|$无限地增大。

依定义易知,若 $f(x)$为负无穷大量或无穷大量,则 $f(x)$一定是无穷大量。

例 1.5.4 (1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}=\infty$

如图 1-19 所示。

例 1.5.5 设 $a>1$,则有

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x=0$

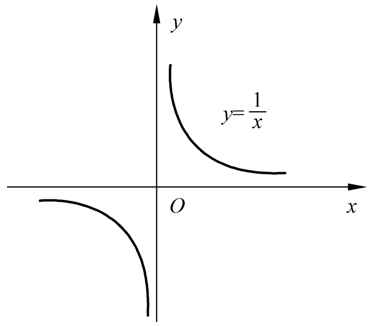


图　1-19

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}$不存在

例 1.5.6　设 $0<a<1$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x}=+\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} a^{x}$不存在

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x}$不存在

如图 1-20 所示。

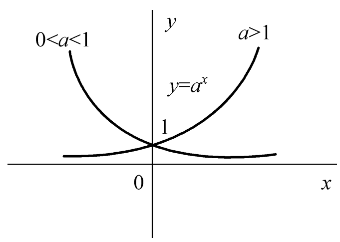


图　1-20

例 1.5.7　设 $a>1$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \log a^{x}=-\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log a^{x}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \ln x=-\infty$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \lg x=-\infty$　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg x=+\infty$

例 1.5.8　设 $0<a<1$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \log a^{x}=+\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log a^{x}=-\infty$

如图 1-21 所示。

例 1.5.9　设 $k\in\mathbf{Z}$，则

(1) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^{-}} \tan x=+\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^{+}} \tan x=-\infty$

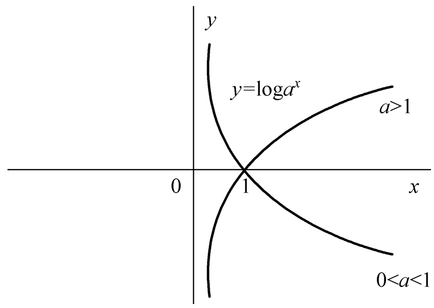


图 1-21

(3) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty$

如图 1-22 所示。

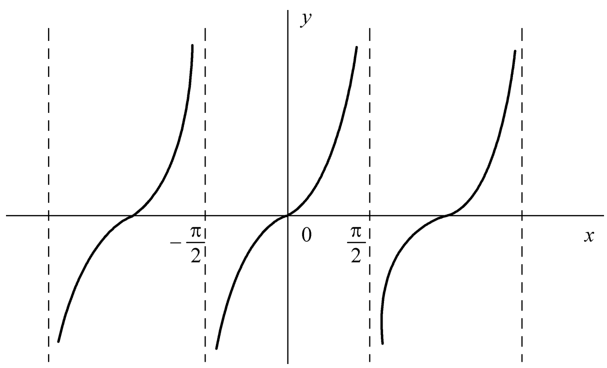


图 1-22

例 1.5.10 设 $k\in \mathbf{Z}$,则

(1) $\lim\limits_{x\to k\pi^-} \cot x=-\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to k\pi^+} \cot x=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to k\pi} \cot x=\infty$

如图 1-23 所示。

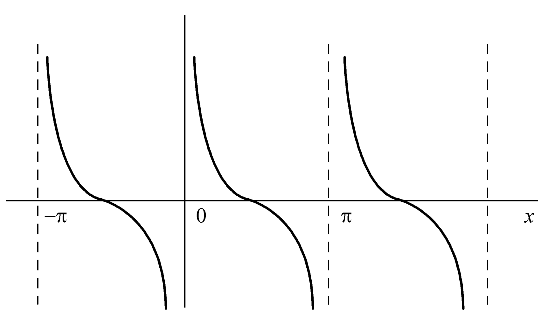


图 1-23

例 1.5.11 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln \dfrac{1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan^{\frac{1}{x}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln\tan x$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\cot x$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to +\infty} e^u = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to \infty} e^u$ 不存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^{\frac{1}{x}} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan \dfrac{1}{x} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to +\infty} \arctan u = \dfrac{\pi}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln\tan x \xlongequal{u=\tan x} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\cot x \xlongequal{u=\cot x} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to -\infty} \operatorname{arccot} u = \pi$

4. 无穷小与无穷大的关系

定理 1.5.2　设 $\lim\limits_{\bullet} f(x) = 0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x) = \infty$，则

(1) $\lim\limits_{\bullet} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$　$(f(x) \neq 0)$

(2) $\lim\limits_{\bullet} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

(3) $\lim\limits_{\bullet} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

(4) $\lim\limits_{\bullet} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$ $(f(x) \neq 0)$

例 1.5.12　(1) $\because \lim\limits_{x\to 0^+} \ln \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{x}} = 0$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0} x^5 = 0$　$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5} = \infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln \dfrac{1}{x}} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1}{x}}{x^3}=\infty$

习题 1.5

1. 求极限。

(1) $l\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}5^x$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n$　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{5^n}$　(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+2\sin n!)$

2. 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sin n}{n}$　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{3x}$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{243\sin x}{x^3}$

3. 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n^2+1)$　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x^{\frac{1}{3}}}$　(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x^{\frac{1}{3}}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x^3}$　(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x^3}$　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^3}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}$　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}$　(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\sin x$

4. 下列函数在所给过程中为无穷大量的是(　　)。

(A) $\ln x\ (x\to 0^+)$　(B) $\ln\ln\dfrac{1}{x}\ (x\to 0^+)$

(C) $3^{-x}\ (x\to-\infty)$　(D) $e^{-x}\ (x\to+\infty)$

5. 下列函数在所给过程中为无穷小量的是(　　)。

(A) $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^-)$　(B) $3^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$

(C) $5^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^-)$　(D) $5^{\frac{1}{x}}\ (x\to\infty)$

6. 下列极限不存在的有(　　)。

(A) $3^x\ (x\to\infty)$　(B) $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}\ (x\to 0)$

(C) $\sin\dfrac{1}{x}\ (x\to 0)$　(D) $\ln\tan x\ (x\to 0^+)$

(E) $2x+\sin x\ (x\to\infty)$　(F) $\cos 3x-x^2\ (x\to\infty)$

1.6　极限的运算法则

本节将讨论极限的运算法则，极限存在的准则和求极限的一些基本方法。

1.6.1　极限的四则运算法则

定理　设$\lim f(x)=A$与$\lim g(x)=B$都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

(4) $\lim Cf(x)=C\cdot\lim f(x)=CA$（$C$ 为常数）

(5) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n(n\in\mathbf{N})$

(6) $\lim\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim f(x)}(n\in\mathbf{N})$

其中法则(1),(2)对有限个函数同样成立。

例 1.6.1　求极限$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1)$。

解　$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1)=\lim\limits_{x\to 2}3x^2-\lim\limits_{x\to 2}2x+\lim\limits_{x\to 2}1=3\lim\limits_{x\to 2}x^2-2\lim\limits_{x\to 2}x+1$

$$=3(\lim_{x\to 2}x)^2-2\times 2+1=3\times 2^2-2\times 2+1=9$$

例 1.6.2　求极限$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{7x^2+2x-6}{3x+5}$。

解

$$\lim_{x\to -4}\frac{7x^2+2x-6}{3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to -4}7x^2+2x-6}{\lim\limits_{x\to -4}(3x+5)}=\frac{7\times(-4)^2+2\times(-4)-6}{3\times(-4)+5}=\frac{98}{-7}=-14$$

设 $f(x)$为初等函数且在 x_0 有定义,则有下面求极限公式:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

例 1.6.3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3\sin x+2\tan x+\cos x+3}$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3\sin x+2\tan x+\cos x+3}=\sqrt{3\sin 0+2\tan 0+\cos 0+3}=\sqrt{4}=2$

例 1.6.4　求极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$。

解　$\because\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+1}=\dfrac{0}{19}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x-3}=\infty$

可以推出下列公式:若$\lim g(x)=c\neq 0$,$\lim f(x)=0$,则有$\lim\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$。

例 1.6.5　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$。

解　不难看出,此题分子、分母的极限均为 0(称为$\dfrac{0}{0}$型未定式),不能直接使用商的极限运算法则。可以采取对分子和分母分别分解因式后,再约去分母中极限为 0 的因子$(x-1)$,然后求极限。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\times 1+1}=\frac{2}{3}$$

评注 一般地,求有理分式$\frac{0}{0}$型未定式的极限,可以采取对分子和分母分别分解因式后,再约去分母中极限为0的因子,然后求极限。

例 1.6.6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3\sin x}{3x+\sin x}$。

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3\sin x}{3x+\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\cdot 3\sin x}{3+\frac{1}{x}\cdot\sin x}\text{(分子分母同除以 }x\text{)}$$
$$=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

例 1.6.7 求下列各极限。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-7}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-7}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{2x^2-7}$

解 这三个题目的分子、分母的极限均为$\infty$$\left(\text{称为}\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式}\right)$,不能直接使用商的极限运算法则,

(1) 分子、分母同除以分母的最高次幂x^2,得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{7}{x^2}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

(2) 与(1)类似,分子、分母同除以分母的最高次幂x^3,得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{7}{x^3}}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

(3) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-7}{x^3+5}=0$,从而由无穷小与无穷大的关系知
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{2x^2-7}=\infty$$

评注 设$P_n(x)$和$Q_m(x)$分别为n次和m次多项式,即
$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$
其中$a_0\neq0,b_0\neq0$,则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\\ \infty & m<n\end{cases}$$
特别地,若$Q_m(x)=1$,则$\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\infty$。

例 1.6.8 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$。

解 由于分子、分母的极限均为0,故不能直接用商的极限运算法则。但是可以通过分子有理化的方法约0因子x,然后求极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

评注　一般地，求无理分式$\frac{0}{0}$型未定式的极限：(1)分子或分母有理化，找到公因式$(x-x_0)^n$；(2)约分；(3)代入。此法称为有理化法。

例 1.6.9　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$。

解　$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{-(1+x+x^2)}=-1$$

评注　这是两个无穷大之差的极限问题(记为$\infty-\infty$型)，一般采用化差为商的方法。

例 1.6.10　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$。

解　这是无穷项和的极限，先求和，后取极限。

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1-0=1$$

例 1.6.11　设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

例 1.6.12　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\leqslant 0\\ 2x & 0<x\leqslant 1\\ x^2+1 & 1<x\end{cases}$。

求：(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

解　(1) ∵

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-1}=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0$$

∴ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在

(2) ∵

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

$\therefore \qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 2x=1$

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x-1}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)=+\infty$

例 1.6.13　求极限 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}[3-|2x-1|]$。

解　$f(x)=3-|2x-1|=\begin{cases} 2+2x & x<\dfrac{1}{2} \\ 4-2x & x\geqslant\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} (2+2x) = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} (4-2x) = 3$$

$\therefore \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}[3-|2x-1|]=3$

1.6.2　极限存在的两个准则

准则 1　设 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有

$$\lim_{\bullet} g(x) = \lim_{\bullet} h(x) = A$$

则有

$$\lim_{\bullet} f(x)=A$$

准则 2　单调有界数列必有极限。

例 1.6.14　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$

解　$\because \dfrac{n+1}{(n+n)^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\leqslant\dfrac{n+1}{n^2}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(n+n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]=0$

习题 1.6

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x-3}$　　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-1}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x^2-3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　　(10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

3. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

4. 设 $f(x)=\sqrt{x}$,$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x+4 & x<1\\ 2x-1 & x\geqslant1\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant1\\ 1 & 1<x<2\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$。

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arcsin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & x\leqslant0\\ 5x^2-4x & 0<x\leqslant1\\ \dfrac{4x}{x+2} & x>1\end{cases}$,求:(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$;(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。

9. 求:(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-|x|}$

10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}=4$,求 a 的值。

1.7　两个重要极限

1.7.1　重要极限 Ⅰ

(1) 标准形$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) 变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$。

证明:作单位圆,如图 1-24 所示。

设圆心角$\angle AOB=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则

$\triangle AOB$ 的面积<扇形 AOB 的面积<$\triangle AOD$ 的面积,因为

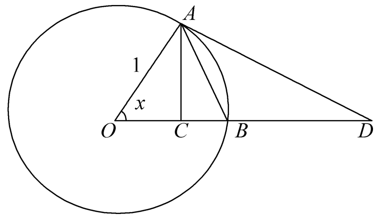


图 1-24

$\triangle AOB$ 的面积$=\frac{1}{2}OB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 1\cdot\sin x$

扇形 AOB 的面积$=\frac{1}{2}\times 1^2\cdot x$

$\triangle AOD$ 的面积$=\frac{1}{2}AO\cdot AD=\frac{1}{2}\times 1\cdot\tan x$

所以$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

即

$$\sin x < x < \tan x$$

同除以 $\sin x$,得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

上面不等式当$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时仍成立。

由$\lim\limits_{x\to 0}1=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,依极限存在准则 1,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

从而有

$$\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

例 1.7.1 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$

$=1\times(2+2)=4$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

评注　求$\dfrac{0}{0}$型的三角函数的极限问题，通常要用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，方法为：

（1）化为正弦函数；

（2）化为标准型（角度为 x）或化为变形（角度为 $g(x)$）；

（3）验证条件，使用公式。

例 1.7.2　求极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\times\dfrac{1}{1}=1$

（2）令 $y=\arcsin x$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$

（3）令 $y=\arctan x$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=1$

评注　例 1.7.2 中的结果都可作为公式使用。

1.7.2　重要极限Ⅱ

1.（1）标准形　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

（2）变形　$\lim\limits_{\varphi(n)\to\infty}[1+\varphi(n)]^{\varphi(n)}=\mathrm{e}$

例 1.7.3　求极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn}(a\neq 0,b\neq 0)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{3n^2}$

分析：以上两题都是 1^∞ 型的极限。

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn}$　（1^∞ 型）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n}{a}}\right)^{bn}$　（把底变形）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot ab}$　（把指数变形）

$=\mathrm{e}^{ab}$　（分别取极限）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{3n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^{3n^2}$（$1^\infty$ 型）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^{(n^2-1)\cdot\frac{3n^2}{n^2-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-1}}=\mathrm{e}^3$

把上面的公式,推广到函数极限,类似的有下面公式。

2.(1)标准形 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(2)变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$

例 1.7.4 求极限

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)[\ln(2x+3)-\ln(2x+1)]$

解 (1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$($1^\infty$ 型)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(3x+1)[\ln(2x+3)-\ln(2x+1)]&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{3x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(3x+1)}{2x+1}}=\ln\mathrm{e}^3=3\end{aligned}$$

把第 2 组公式变成等价形式,有下面公式。

3.(1)标准形 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(2)变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$

例 1.7.5 求极限。

(1)$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{x}}$ (2)$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}$

(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ (4)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{2\tan x}$

解 (1)$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{\tan3x}\cdot\frac{\tan3x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}}=\mathrm{e}^3$

(2)$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}\cdot(-3)}=\mathrm{e}^{-3}$

(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot3}=\ln\mathrm{e}^3=3$

(4)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{2\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\frac{1}{\cot x}\cdot2}=\mathrm{e}^2$

重要极限Ⅱ是求幂指函数 1^∞ 型不定式$\lim f(x)^{g(x)}$的极限的重要公式。解题时,应先检验是否为 1^∞ 型,再化为公式的形状,检查条件,套用公式。

例 1.7.6 当 $x\to0$ 时,下列无穷小量与 x 相比是什么阶的无穷小量。

(1)$x+\tan x^2$ (2)$\sqrt{x}+\sin x$

(3)$\sin x+\tan x$ (4)$\ln(1+2x)$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x^2}{x^2}\cdot x\right)=1+1\times 0=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{\tan x}{x}\right)=1-1=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln e^2=2$

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$x+\tan x^2$ 比 x 的等价无穷小，$\sqrt{x}+\sin x$ 比 x 是低阶无穷小，$\sin x-\tan x$ 比 x 是高阶无穷小，$\ln(1+2x)$ 与 x 是同阶不等价无穷小。

1.7.3　利用等价无穷小替换法求极限

定理 1.7.1　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则有 $\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$。

证明：$\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\cdot}\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

例 1.7.7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$。

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

推论　(1) $\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta'}{\alpha}=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{\beta}{\alpha'}$

(2) $\lim\limits_{\cdot}\dfrac{1}{\alpha}\cdot\beta=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{1}{\alpha'}\cdot\beta'=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{1}{\alpha}\cdot\beta'=\lim\limits_{\cdot}\dfrac{1}{\alpha'}\cdot\beta$

注：可以证明当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$。

例 1.7.8　求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^3+3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2+3}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan x(1-\cos x)}{\frac{x^2}{3}\cdot\frac{\sin x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{3}\cdot\frac{1}{2}x}=-3$

习题 1.7

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

2. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{2}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{x}}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{\sin x}}$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\sqrt{x}}$

3. 证明：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{4x}-2$ 与 $\sqrt{9x}-3$ 是同阶无穷小量。

4. 证明：$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}\quad(x\to 0)$。

5. 证明：$\arctan x-\arcsin x=o(x)\quad(x\to 0)$。

1.8　函数的连续性

本章前两节讨论了微积分的研究对象——函数，之后的五节又给出了研究函数的方法——极限。这就为我们用分析的方法研究函数奠定了基础。但是，函数的种类极为复杂，那么应从研究什么类型的函数开始呢？微积分的发展史告诉我们，无论在理论上或在实践中都应从连续函数开始。这是因为，在现实世界中许多变量的变化是连续的。如流体的连续流动，气温的连续上升，压力的连续增加等，这种现象反映到数学上就是函数的连续性；另外，我们常常直接或间接地借助于连续函数讨论一些不连续函数。于是连续

函数就成为微积分这门课程的主要研究对象。

1.8.1　函数连续的概念

1. 函数的增量(或改变量)

在函数 $y=f(x)$的定义域内，设自变量 x 由始值 x_0 变到终值 x，相应的函数值由始值 $f(x_0)$变到终值 $f(x)$，则把差 $\Delta x=x-x_0$ 叫作自变量 x 在 x_0 点的增量或改变量，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$叫作函数 y 在 x_0 点相应的增量或改变量，依定义有

$$x=x_0+\Delta x,\quad f(x)=f(x_0)+\Delta y$$

于是，有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

当自变量由 x 变到 $x+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$的增量为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

注意，Δx 与 Δy 都是表示增量的完整记号，Δx 与 Δy 可正可负也可为 0。

例 1.8.1　求函数 $y=x^2$ 当 $x=2,\Delta x=0.1$ 时的增量。

解　$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\Delta x+(\Delta x)^2=4\times 0.1+0.1^2=0.41$

例 1.8.2　求 $y=\sqrt{x}$ 当 $x=3,\Delta x=-0.2$ 时的增量。

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(3-0.2)-f(3)$

$=f(2.8)-f(3)=\sqrt{2.8}-\sqrt{3}=-0.05$

例 1.8.3　当在某点处自变量有增量 Δx 时，求函数 $y=3x^2$ 的增量。

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=3(x+\Delta x)^2-3x^2$

$=3[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]-3x^2=6x\Delta x+3(\Delta x)^2$

2. 函数在一点连续的定义

凡属连续变化的运动，在数量上有共同的特点。拿气温的变化来说，气温随着时间的变化而变化，气温是时间的函数，当时间的增量很小时，气温的增量也很少。因此，连续变化的概念反映在数学上，就是当自变量的增量很微小时，函数的增量也很微小。

定义 1.8.1　设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，或称 x_0 是 $f(x)$的连续点。

由于 $0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]\xlongequal{x=x_0+\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)-f(x_0)]$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(x_0)$

因此，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续的定义可用下面方式叙述。

定义 1.8.2　设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某个领域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，或称 x_0 是 $f(x)$的连续点。

3. 函数在一点连续的三个条件

$$f(x)\text{在 } x_0 \text{ 处连续}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\text{在 } x_0 \text{ 点有定义}\\(2)\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\text{存在}\\(3)\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)\end{cases}$$

4. 左连续与右连续

定义 1.8.3 设 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(x_0)\text{(或}\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0)\text{)}$$

则列 $f(x)$在点 x_0 处左(或右)连续。

由连续定义及双侧极限与单侧极限的关系，我们有下面定理。

定理 1.8.1 $f(x)$在 x_0 处连续的充要条件是，$f(x)$在 x_0 左连续且右连续。

5. 在区间上连续的定义

定义 1.8.4 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续；若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

下面，我们再给出函数在一点不连续或间断的定义。

6. 函数在一点间断

定义 1.8.5 如果函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的三个条件至少有一条不成立，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续(或间断)，称 x_0 为 $f(x)$的不连续点(或间断点)。

定义 1.8.6 间断点的分类

若函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时，左右极限都存在但不相等，则称点 x_0 为 $f(x)$的第一类跳跃间断点；若函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时，左右极限都存在且相等，即极限存在，但不等于函数 $f(x)$在 x_0 点的函数值(或 $f(x)$在 x_0 点无定义)，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类可去间断点。

除了第一类间断点外，其他间断点都称为第二类间断点。

例 1.8.4 求下列函数的间断点，并指明类型。

(1) $f(x)=\begin{cases} x-2 & x<0 \\ \mathrm{e}^x & x\geqslant 0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-2x}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-x}}}$

解 (1) 它是分段函数，当 $x<0$ 时，$x-2$ 是连续的；当 $x\geqslant 0$ 时，e^x 也是连续的。因此考察分段点 $x=0$ 处的情形，由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-2) = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x = 1$$

可见，左右极限都存在但不相等，所以 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类跳跃间断点。

(2) 它是初等函数，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$。

在 $x=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(x-2)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x-2}\right) = -\frac{1}{2}$$

所以，$x=0$ 是第一类可去间断点。

在 $x=2$ 处，因为

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sin x}{(x-2)} = \infty$$

所以，$x=2$ 是第二类间断点。由于$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$，我们也把这样的间断点称为无穷间断点。

(3) 函数 $f(x)$是初等函数，定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。在 $x=1$ 处，由于

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}} = 1$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$的第一类跳跃间断点。

例 1.8.5　讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处的连续性。

解　因为函数 $f(x)$在 $x=0$ 处没有定义，并且$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以此点是 $f(x)$的第二类间断点。这种间断点称为振荡间断点，如图 1-25 所示。

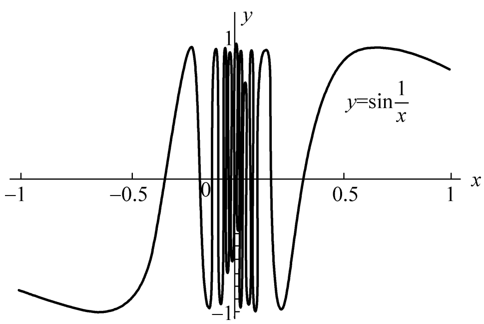


图　1-25

1.8.2　连续函数的有关定理

定理 1.8.2(四则运算)　若 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 处都连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$与$\dfrac{f(x)}{g(x)}$$(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0 处都连续。

定理 1.8.3(复合函数的连续性)　若 $u=g(x)$在 x_0 处连续，$y=f(u)$在 $u_0=g(x_0)$处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x_0 处连续。

由定理 1.8.3，有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x\to x_0} g(x)]$$

从而知道，求复合函数的极限时，如果 $u=g(x)$在 x_0 处有极限，且 $y=f(u)$在 $u_0=g(x_0)$处连续，则极限符号与函数符号 f 可以交换。

定理 1.8.4(反函数的连续性)　若函数 $y=f(x)$在某区间上严格单调且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$在对应区间上严格单调且连续。

定理 1.8.5(初等函数的连续性)　初等函数在定义区间上连续。

由定理 1.8.5，可得到，若 $f(x)$是初等函数，且在 x_0 处有定义，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 1.8.6　讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leqslant 0 \\ 2x^2+1 & 0 < x \leqslant 3 \\ x^3-8x+16 & 3 < x < 5 \end{cases}$$

在点 $x=0$,$x=3$ 的连续性。

解　依连续性定义的三个条件,逐条讨论。

① 在 $x=0$ 处。

$f(x)$在 $x=0$ 有定义,$f(0)=1$

$\because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(3x+1)=1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(2x^2+1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)=1=f(0)$,$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

② 在 $x=3$ 处。

$f(x)$在 $x=3$ 有定义,$f(3)=19$

$\because \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-}(2x^2+1)=19$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+}(x^3-8x+16)=19$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x)=19=f(3)$,从而 $f(x)$在 $x=3$ 连续。

例 1.8.7　试补充定义 $f(0)$的值,使得 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$在 $x=0$ 处连续。

解　$\because \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

$\therefore$令 $f(0)=1$,则 $f(x)$在 $x=0$ 处连续。

例 1.8.8　求下列函数的间断点和连续区间。

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$　　　(2) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x<0 \\ 3x+1 & 0<x<1 \\ 3 & 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

解　(1) 先求定义域。令

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0 \\ 2x^2-x-1 \neq 0 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ x \neq -\dfrac{1}{2} 且 x \neq 1 \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{D_f}=\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

因为 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$是初等函数，所以，连续区间为$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$。

(2) 当 $x<0$ 时，$y=\dfrac{1}{x-1}$为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $0<x<1$ 时，$y=3x+1$ 为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=3$ 为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $x=0$ 时，y 无定义，从而不连续；

当 $x=1$ 时，$f(x)$有定义，$f(1)=3$。

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}3=3$$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在，所以 $f(x)$在 $x=1$ 不连续。

$\because \mathbf{D}_f=(-\infty,0)\cup(0,4]$

$\therefore$间断点为 $x=0,x=1$，连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,4]$。

例 1.8.9　设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[x]{1+2x} & x\neq 0\\ a+1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解　$f(0)=a+1,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$

因为 $f(x)$在 $x=0$ 连续，所以有 $a+1=\mathrm{e}^2,a=\mathrm{e}^2-1$。

1.8.3　闭区间上连续函数的性质

下面介绍定义在闭区间上的连续函数四个基本性质。这些性质在几何上是很直观的，然而严格的证明是很困难的，因此，要求结合图形理解这些性质，并会应用就可以了。

定理 1.8.6(有界性)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界。

定理 1.8.7(最大值与最小值性质)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上一定存在最大值与最小值。

例如在图 1-26 中，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。曲线 $y=f(x)$是由 A 到 B 的一条连续曲线；最高点处的函数值 $f(x_2)$为最大值 M，最低点处的函数值 $f(x_1)$为最小值 m，且曲线在水平直线 $y=M$ 与 $y=m$ 之间，$f(x)$在$[a,b]$上有界。

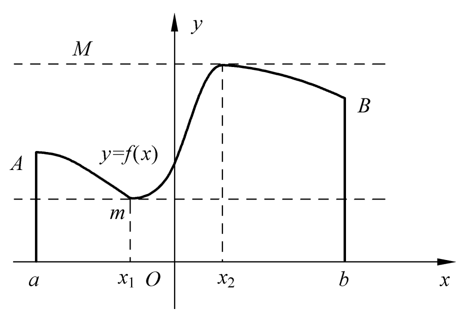


图　1-26

定理 1.8.8(介值性) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,m 和 M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值,则对介于 m 与 M 之间的任一实数 $c(m<c<M)$,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=c$。

例如,在图 1-27 中,连续曲线 $y=f(x)$与直线 $y=c$ 相交于三点,其横坐标分别为 ξ_1,ξ_2,ξ_3,所以有 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=c$。

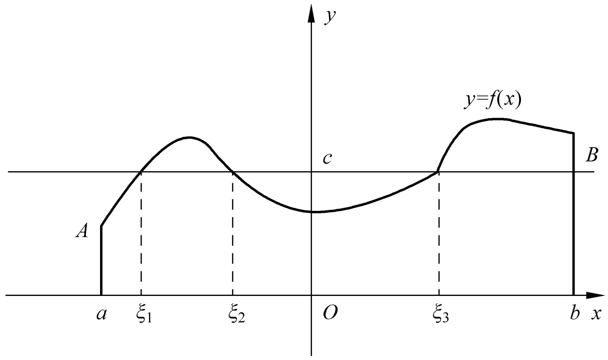


图 1-27

定理 1.8.9(零点性质) 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$。

例如,在图 1-28 中,由于 $f(a)$与 $f(b)$异号,A 与 B 在 x 轴的两侧,则连续曲线 $y=f(x)$在 x 轴至少有一个交点$(\xi,0)$,所以有 $f(\xi)=0$。

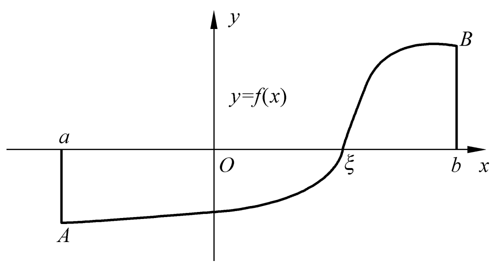


图 1-28

例 1.8.10 **证明** 方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 在$(-2,0)$,$(0,2)$,$(2,4)$内各有一个实数根。

证明:由于 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ 在任意区间$[a,b]$上连续,且 $f(-2)<0$,$f(0)>0$,$f(2)<0$,$f(4)>0$,所以 $f(x)$在$(-2,0)$,$(0,2)$,$(2,4)$上分别满足零点性质条件,由零点性质知,存在 $\xi_1\in(-2,0)$,$\xi_2\in(0,2)$,$\xi_3\in(2,4)$,使得 $f(\xi_1)=0$,$f(\xi_2)=0$,$f(\xi_3)=0$,这说明,ξ_1,ξ_2,ξ_3都是方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 的实根。

由于三次方程至多有三个实根,所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3是该方程的全部实根,即每个区间内各有一个实根。

习题 1.8

1．求函数 $f(x)=-x^2+\frac{1}{2}x$ 当 $x=1,\Delta x=0.5$ 时的增量。

2．设 $f(x)=\frac{1}{x}$，当自变量由 x 变到 $x+\Delta x$ 时，求函数的增量 Δy。

3．讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性。

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x\arcsin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$

(6) $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

4．给 $f(0)$ 补充定义一个数值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

(1) $f(x)=\sin x\cos\frac{1}{x}$　　(2) $f(x)=\ln(1+ax)^{\frac{b}{x}}$

5．求下列函数的间断点和连续区间，并判断间断点的类型。

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$　　(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

(3) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & x>0 \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} |x| & |x|\leqslant 1 \\ \frac{x}{|x|} & 1<|x|\leqslant 3 \end{cases}$

6．设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

7．设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin x & x<0 \\ k & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$，问 k 为何值时 $f(x)$ 是连续函数，为什么？

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & x>0,且\ x\neq 1\\ A & x=1\end{cases}$,求 A 的值,使 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续。

9. 证明方程 $x^4-3x^2+7x=10$ 在区间$(1,2)$内至少有一个实数根。

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a & x\leqslant 0\\ x^2+1 & 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & x\geqslant 1\end{cases}$,若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,求 a,b 的值。

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0(a>0)\end{cases}$

(1) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的连续点。

(2) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的间断点。

(3) 当 $a=2$ 时,求 $f(x)$的连续区间。

12. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)<a$,$f(b)>b$,试证在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$。

第 1 章习题参考答案

习题 1.1

1. (1) $\{3,4\}$ (2) $\{(0,0),(1,1)\}$ (3) $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

2. (1) $\{x|x>5\}$ (2) $\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$ (3) $\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x+y=0\}$

3. $\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E}$

4. 对的有:$1\in\mathbf{A}$,$0\notin\mathbf{B}$,$\{1\}\subset\mathbf{A}$,$A\supset\mathbf{B}$,$\varnothing\subset\mathbf{A}$,$A\subset\mathbf{A}$。其余不对。

5. 不对的有:$\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\varnothing$,$\mathbf{A}\cup\varnothing=\varnothing$,$\mathbf{A}\cap\varnothing=\mathbf{A}$,$\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A}$,$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}=\mathbf{U}$。其余对。

6. (1) $\{\mathrm{x}|-4<\mathrm{x}\leqslant 1$ 或 $3\leqslant\mathrm{x}<4\}$ (2) $\mathbf{R}$

(3) $(-\infty,-4)\cup[4,+\infty)$ (4) $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

(5) $(1,3)$ (6) $[(-\infty,-4]\cup(1,3)\cup[4,+\infty]$

7. $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{a,b,c,e,f\}$,$\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\{f\}$,$\mathbf{A}\cap\mathbf{C}=\{a,c\}$;$(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\{a,c,f\}=c$,$(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})=\{a,c,f\}=c$。

习题 1.2

1. (1) $(-1,0)\cup(0,1)$ (2) $[-2,1)$ (3) $(2,4)$ (4) $[-1,0)\cup(0,1]$

2. (1) $[0,1)\cup(1,10)$ (2) $-4,4$

3. (1) $[-1,1]$ (2) $2k\pi,(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

(3) $[-a,1-a]$ (4) $\left[\dfrac{1}{10},1\right]$

4. (1) $[0,1]$ (2) $[2,4]$ (3) $\varnothing$

5. $f(0)=1$,$f(-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,$f(x+1)=-\dfrac{x}{x+2}$,$f(x)+1=\dfrac{2}{x+1}$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$,

$f[f(x)]=x, f\left[f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$

6. $g(3)=2, g(2)=1, g(0)=2, g(0.5)=2, g(-0.5)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $f(1)=0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

8. $f(x+1)=\begin{cases} x-2 & 1\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2+2x-2 & 0<x\leqslant 4 \end{cases}$

9. $y=\begin{cases} 1-3x & x<\frac{1}{3} \\ 3+3x & x\geqslant\frac{1}{3} \end{cases}$

10. (1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$　(2) $f(x)=-x^2, f(0)=0$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+20 & 5<x\leqslant 6 \\ \frac{1}{x-6} & 6<x<8 \end{cases}$

(4) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$

11. (1) $y=\ln\frac{x}{1-x}$　(2) $y=\dfrac{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}{-1+\arcsin\frac{x-1}{2}}$

(3) $y=10^{x-1}-2$　(4) $y=\frac{1}{2}[\log_3 x-5]$

(5) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$　(6) $y=\frac{2(x+1)}{x-1}$

12. (1) $y=-\sqrt{x}, x\geqslant 0$　(2) $y=-x^3, x\leqslant 0$

(3) $y=(x+1)^3, x\leqslant -1$　(4) $y=\sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$

13. $y=\begin{cases} \sqrt{x+1} & 1\leqslant x\leqslant 0 \\ \sqrt{x} & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$

14. (1) $a=2$，是复合函数，$\mathbf{D}_f=(-\infty,+\infty)$

(2) $a=\frac{1}{2}$，是复合函数

$$\mathbf{D}_f=\left\{x \mid 2k\pi-\frac{7}{6}\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$$

(3) $a=-2$，不是复合函数。

15. $f[g(x)]=e^{x-1}(2e^{x-1}+1), g[f(x)]=e^{2x^2+x-1}$

16. (1) $y=u^3, u=\sin v, v=x^2$

(2) $y=\ln u, u=\sin v, v=1-x$

习题 1.3

1. (A,B) 2. (A,D) 3. (A,B,C,D) 4. (D) 5. (B)

习题 1.4

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (A,B,C,D)

习题 1.5

1. (1) $+\infty$ (2) 0 (3) 不存在 (4) 0 (5) $+\infty$ (6) 不存在 (7) $+\infty$ (8) 0 (9) $+\infty$

2. (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) 0

3. (1) $+\infty$ (2) $+\infty$ (3) 0 (4) $\frac{\pi}{2}$ (5) $-\pi$ (6) 不存在 (7) 0 (8) 0 (9) $-\infty$

4. (A,B,C)

5. (A,C)

6. (A,B,C,D,E,F)

习题 1.6

1. (1) -8 (2) 1 (3) ∞ (4) ∞ (5) $\frac{3}{4}$ (6) $\frac{2}{3}$ (7) $-\frac{1}{2}$ (8) $\frac{5}{2}$ (9) $\frac{1}{2}$ (10) $-\frac{1}{2}$

2. (1) -1(2) 1

3. (1) $\sqrt{2}-1$(2) $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. (1) 不存在 (2) 4

6. 不存在

7. 0

8. (1) 0 (2) 不存在 (3) 4

9. (1) 不存在 (2) 不存在

10. $a=-3$

习题 1.7

1. (1) 3 (2) $\frac{5}{3}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2 (6) $\frac{2}{3}$ (7) $\alpha-\beta$ (8) $\frac{1}{2}$

2. (1) e (2) e^{-2} (3) e^{-3} (4) 2 (5) e^2 (6) e^2 (7) 1 (8) e (9) e^2 (10) e^{-2} (11) e (12) e^2 (13) e^4 (14) e^2 (15) -3 (16) $\sqrt{e}$ (17) 1

习题 1.8

1. -1

2. $\Delta y=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

3.（1）连续　（2）连续　（3）不连续　（4）连续　（5）不连续　（6）连续

4.（1）0　（2）e^{ab}

5.（1）$x=-1,x=1,[-2,-1]\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，第一类可去间断点。

（2）$x=2,x=3,(-\infty)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$，第一类可去间断点。

（3）$x=0,(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，第一类跳跃间断点。

（4）$x=-1,[-3,-1]\cup(-1,3)$，第一类可去间断点。

6. 不连续

7. $k=1$

8. $A=-1$

10. $a=1,b=2$

11.（1）$a=1$，$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

（2）$a\neq1,a>0$，$f(x)$在 $x=0$ 处不连续。

（3）$a=2$ 时，连续区间为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

第 2 章　导数与微分

从本章开始，我们将介绍微积分的主要内容——微分学和积分学。

导数与微分及其应用称为微分学。本章将介绍微分学的两个基本概念——导数与微分，以及导数与微分的计算公式、运算法则。

2.1　导 数 概 念

2.1.1　曲线的切线斜率

设有一条平面曲线如图 2-1 所示，方程是 $y=f(x)$，求过该曲线上一点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率。

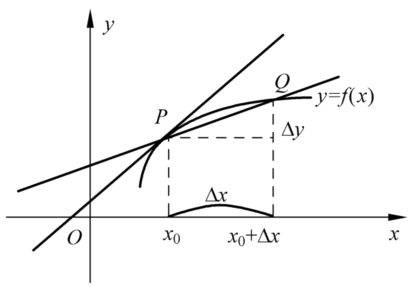


图　2-1

在曲线上任取一点 Q，设它的坐标为 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，其中 $\Delta x\neq 0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。由解析几何知，过曲线 $y=f(x)$ 上两点 $P(x_0, f(x_0))$，$Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的割线的斜率为

$$k_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当 Δx 变化时，即点 Q 在曲线上变化时，割线 PQ 的斜率 k_1 也随之变化。当 $|\Delta x|$ 较小时，割线 PQ 的斜率 k_1 应是曲线上点 P 的切线斜率的近似值。当 $|\Delta x|$ 越小，这个近似程度也越好。于是，当 Δx 无限趋近于 0 时，即点 Q 沿着曲线无限趋近于点 P 时，割线 PQ 的极限位置就是曲线过点 P 的切线，同时割线 PQ 的斜率 k_1 的极限 k 就是曲线过点 P 的切线斜率，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2-1}$$

于是，过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线方程是

$$y-f(x_0)=k(x-x_0)$$

如果抛开几何意义，把曲线方程 $y=f(x)$ 看成函数 $y=f(x)$，则式(2-1)的极限是函

数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比，当自变量的增量 Δx 趋于 0 时的极限，这种特殊的极限叫作函数的导数。

2.1.2　导数概念

定义 2.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx 时，函数 y 取得相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导或导数存在，称这个极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数或微商，记为 $f'(x_0)$，或

$$f'(x)\big|_{x=x_0},\quad y'\big|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{2-2}$$

或在式(2-2)中，令 $x=x_0+\Delta x$ 和 $h=\Delta x$，则有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\tag{2-3}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\tag{2-4}$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导或导数不存在。

定义 2.1.2　若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左可导或左导数存在，称这个左极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$；若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右可导或右导数存在，称这个右极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$。即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数与右导数统称为单侧导数。由双侧极限与单侧极限的关系，我们有下面定理。

定理 2.1.1　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等。

推论 1　若 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在但不相等，则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

推论 2　若 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 至少有一个不存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

定义 2.1.3　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在

区间(a,b)内可导。这时，对于区间(a,b)内的每一点x，都有一个导数值$f'(x)$与它对应，因此，$f'(x)$是x的函数，称其为函数$f(x)$在区间(a,b)内的导函数，简称为导数，记为

$$f'(x),y',\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\quad 或\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

于是，在导数的定义2.1.1中，将x_0换成x，即为导函数的定义

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2-5}$$

函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是导函数$f'(x)$在点x_0处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

通常称导函数$f'(x)$为导数，但应区别于函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$。

如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导，在$x=a$处右可导，在$x=b$处左可导，则称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导。

根据曲线的切线斜率的计算公式和函数在一点的导数定义，我们得到导数的几何意义是：

曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率是$K=f'(x_0)$。

若$f'(x_0)$存在，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

若$f'(x_0)=0$则切线$y=f(x_0)$平行于Ox轴，若$f'(x_0)=\infty$，则切线$x=x_0$垂直于Ox轴。

由此可知，若函数$f(x)$在点x_0处可导，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$是具有不垂直于x轴的切线。若函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则在区间(a,b)内曲线$y=f(x)$上每一点具有不垂直于x轴的切线。

评注 由导数的定义2.1.1可知，求函数$y=f(x)$在x_0点的导数$f'(x_0)$，求导过程可以分为以下三个步骤：

(1) 求函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2) 算比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) 取极限$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

例 2.1.1 求函数$y=x^2$在$x=2$处的导数。

解 (1) 求函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\Delta x+(\Delta x)^2$

(2) 算比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$

(3) 取极限$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$

评注 由导数的定义2.1.3可知，求函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$，求导过程可以分为以下三个步骤：

(1) 求该变量(即增量)$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 算比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3) 取极限$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

下面利用导数的定义求一些初等函数的导数。

例 2.1.2　设 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(x)$，$f'(4)$ 。

解　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(4)=f'(x)|_{x=4}=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}。$$

例 2.1.3　设 $y=C$（C 为常数），求 y'。

解　$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$
即 $C'=0$。

例 2.1.4　设 $y=\sin x$，求 y'。

解　$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x$$
即 $(\sin x)'=\cos x$。

同样，依照定义，可以求出下列导数。

幂函数的导数　$(x^n)'=nx^{n-1}(x\in\mathbf{N})$

指数函数的导数　$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

对数函数的导数　$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x}\ln a\ (a>0,x\neq 1)$　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

余弦函数的导数　$(\cos x)'=-\sin x$。

例 2.1.5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$。

解　$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=0$$

例 2.1.6 设 $f'(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant 1\\ x^2+1 & 1<x\leqslant 2\\ \frac{1}{2}x+4 & 2<x\end{cases}$,讨论 $f(x)$在点 $x=1,x=2$ 处的可导性。

解 ① 在 $x=1$ 处。

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}2=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$f'_-(1)=f'_+(1)$,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=2$。

② 在 $x=2$ 处。

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{2}x+4-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$f'_-(2)\neq f'_+(2)$,所以 $f(x)$在 $x=2$ 处不可导,即 $f'(2)$ 不存在。

评注 求分段函数在分界点 x_0 处的导数:若分界点 x_0 处两侧表达式相同,则必须用导数的定义求导;若分界点 x_0 两侧表达式不同,则必须先求左、右导数 $f'_-(x_0)$与 $f'_+(x_0)$,再根据左、右导数 $f'_-(x_0)$与 $f'_+(x_0)$存在与导数 $f'(x_0)$存在的关系确定其导数。

例 2.1.7 讨论函数 $f(x)=1-|x|$在 $x=0$ 处的可导性。

解 先把 $f(x)$化为分段函数。

$$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1-x & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导。

例 2.1.8 设 $f(x)$在点 x_0 处可导,求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$$

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-3[f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)]}{3\Delta x}$

$$\xlongequal{h=3\Delta x}-3\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-3f'(x_0)$$

例 2.1.9 求 $y=\sin x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{6}$处的切线方程和法线方程。

解 切线斜率 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos x|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

因为 $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$,所以切点为$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$,故在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$处,切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$；

法线斜率为$-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，因此法线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$。

评注　求曲线 $y=f(x)$在 x_0 点切线方程的步骤如下：

(1) 求斜率 $f'(x_0)$；

(2) 求切点$(x_0,f(x_0))$；

(3) 写出切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

2.1.3　可导与连续的关系

定理 2.1.2　如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$在点 x_0 处一定连续。

证明：设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，因为 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

存在，从而有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$$

依定义，$y=f(x)$在点 x_0 处连续。

推论　若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不连续，则 $y=f(x)$在点 x_0 处一定不可导。

我们将举例说明，定理 2.1.2 的逆定理不成立。即如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，但 $y=f(x)$在点 x_0 处不一定可导。

例 2.1.10　设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，

所以 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续。

因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

不存在，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导。

例 2.1.11　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 0\\ 2x+1 & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-}=\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，依定义，$f(x)$在点 $x=0$ 处不连续，从而知 $f(x)$在点 $x=0$ 处不可导。

例 2.1.12 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$,试确定 a,b 的值,使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

解 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故必须有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$,又因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$f(1)=2$$

因此得出 $a+b=2$。

再由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导,必须 $f'_-(1)=f'_+(1)$。

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+2-a-2}{x-1}=a$$

因此得出 $a=2$,所以,当 $a=2,b=0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导。

评注 $f(x)$点 x_0 处的可导$\Rightarrow f(x)$在 x_0 处连续,则可利用 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,求出函数式中两个待定常数。

习题 2.1

1. 当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却,若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$,怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

2. 设下述极限存在,则

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________,其中 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$存在。

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$________。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________,其中 $f'(x_0)\neq 0$。

3. 用定义求下列函数的导数。

(1) $y=ax+b$　　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$

4. 对上题,求 $y'(1)$ 和 $y'(2)$。

5. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处连续,求 $f'(a)$。

6. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,求 $f'(0)$。

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

8. 设 $f(x)=|x|$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

9. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\geqslant x<1 \\ 3x-1 & x\geqslant 1 \end{cases}$，在点 $x=1$ 处的连续性与可导性。

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f'(0)$。

11. 讨论 $f(x)=\begin{cases} 1 & x\leqslant 0 \\ 2x+1 & 0<x\leqslant 1 \\ x^2+2 & 1<x\leqslant 2 \\ x & 2<x \end{cases}$，在点 $x=0$，$x=1$，$x=2$ 处的连续性与可导性。

12. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}$$

13. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线方程。

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \cos x & x\leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}-x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，问 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 可导吗？若可导，试求曲线方在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 处的切线方程。

15. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$，在 $x=1$ 处可导，求 a 与 b 的值。

2.2　求导法则和导数公式

2.2.1　函数和差积商的求导法则

定理 2.2.1　设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处都可导，则函数 $u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处也可导，且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$

这个公式对有限个函数代数和的导数仍成立，有

$$[u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x)]'=u_1'(x)\pm u_2'(x)\pm\cdots\pm u_n'(x)$$

例 2.2.1　设 $y=\cos x+3^x-\ln x+2$，求 y'。

解　$y'=(\cos x)'+(3^x)'-(\ln x)'+(2)'=-\sin x+3^x\ln 3-\dfrac{1}{x}+0$

$$=-\sin x+3^x\ln 3-\frac{1}{x}$$

评注　注重公式 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$ 的应用。

定理 2.2.2　设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处都可导，则函数 $u(x)v(x)$ 在点 x 处也可

导,且

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

此法则对有限个函数乘积的导数仍成立,即

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 + \cdots + u_{n-1} u_n'$$

特列,若 $u=C$ 为常数,有$[Cu(x)]'=C\cdot u'(x)$,即常数因子可移到导数符号之外。

例 2.2.2 求导数:(1) $y=x\sin x$ (2) $y=x^4\cdot e^x\cdot \ln x$

解 (1) $y'=(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$

评注 注重公式$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$的应用。

(2) $y'=(x^4\cdot e^x\cdot \ln x)'=(x^4)'\cdot e^x\cdot \ln x+x^4\cdot (e^x)'\cdot \ln x+x^4\cdot e^x\cdot (\ln x)'$

$$=4x^3\cdot e^x\cdot \ln x+x^4\cdot e^x\cdot \ln x+x^4\cdot e^x\cdot \frac{1}{x}=x^3e^x(4\ln x+x\ln x+1)$$

评注 注重公式$(u_1u_2\cdots u_k)'=u_1'u_2\cdots u_k+u_1u_2'\cdots u_k+\cdots+u_1u_2\cdots u_k'$的应用。

定理 2.2.3 设函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x 处都可导,且 $v(x)\neq 0$,则函数$\dfrac{u(x)}{v(x)}$在点 x 处可导,且有

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

特例,有$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$

例 2.2.3 求正切函数 $y=\tan x$ 的导数。

解 $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

类似地可求得

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

评注 注重公式$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$的应用,以上结果要作为求导公式记住。

例 2.2.4 求正割函数 $y=\sec x$ 的导数。

解 $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$

类似地可求得

$$(\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$$

评注 注重公式$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$的应用,以上结果要作为求导公式记住。

例 2.2.5 设 $y=\dfrac{x+1}{\ln x}$,求 y'。

解 $y'=\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)'=\dfrac{(x+1)'\ln x-(x+1)(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-(x+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}$

2.2.2 反函数求导法则

定理 2.2.4 设函数 $y=f(x)$在某区间内单调,可导且 $f'(x)\neq 0$,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$在相应区间内也可导,且有

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)} \quad 或 \quad f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

即反函数的导数等于原来函数的导数之倒数。

例 2.2.6 求反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的导数。

解 $y=\arcsin x$ 的反函数是 $x=\sin y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$,

而$(\sin y)'=\cos y>0$,因此

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似地,可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

评注 以上结果要作为求导公式记住。

2.2.3 复合函数求导法则

定理 2.2.5 设 $u=g(x)$在点 x 处可导,$y=f(u)$在相应点 $u=g(x)$处可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 处也可导,且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

记作

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

即$[f(g(x))]'=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$

例 2.2.7 设 $y=\sin\ln x$,求 y'。

解 设 $y=\sin u$,$u=\ln x$,则

$$y'=(\sin\ln x)'=(\sin u)'\cdot(\ln x)'=\cos u\cdot\frac{1}{x}=\frac{\cos\ln x}{x}$$

例 2.2.8 设 $y=(3x+5)^{100}$,求 y'。

解 设 $y=u^{100}$,$u=3x+5$,则

$$\begin{aligned}y'&=[(3x+5)^{100}]'\\&=(u^{100})\cdot(3x+5)'\\&=100\times u^{100-1}\times 3\\&=300(3x+5)^{99}\end{aligned}$$

例 2.2.9 设 $y=f(x^2+1)$,求 y'。

解 $y'[f(x^2+1)]'=f'(x^2+1)\cdot(x^2+1)'$

$=f'(x^2+1)\cdot(2x+0)$

$=2xf'(x^2+1)$

例 2.2.10 设 $y=x^\alpha$(α 为任意实数),求 y'。

解 $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$

设 $y=e^u, u=\alpha\ln x$,则

$$y'=(x^\alpha)'=(e^u)'\cdot(\alpha\ln x)'$$

$$=e^u\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}$$

$$=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=ax^{\alpha-1}$$

评注 复合函数求导既是重点又是难点,在求复合函数的导数时,首先分清函数的复合层次,然后从外及里进行逐层求导,不能遗漏,也不能重复;在求导的过程中,始终明确所求的导数是哪个函数对哪个变量(不管是自变量还是中间变量)的导数,在开始时可以先设中间变量一步一步去做,待熟练后中间变量可以省略不写,只需把中间变量记在心中,直接把表示中间变量的部分写出来,整个过程一气呵成。

到现在为止,我们已将基本初等函数的导数全部求出。

2.2.4 导数公式

为便于记忆和使用,我们将本节得到的所有导数公式列在下面:

1. $(C)'=0$(C 为常数)
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为任意实数)

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. $(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0, a\neq1)$
4. $(e^x)'=e^x$
5. $(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x}\log_a^e=\dfrac{1}{x\ln a}\,(a>0, a\neq1)$
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(\tan x)'=\sec^2 x$
10. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
11. $(\sec x)'=\sec x\tan x$
12. $(\csc x)=-\csc x\cot x$
13. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1<x<1)$
14. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1<x<1)$

15. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$

16. $(\mathrm{arccot}x)'=-\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<+\infty)$

17. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

18. $(uv)'=u'v+uv'$

19. $(C\cdot v)'=C\cdot v'$(C 为常数)

20. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$

21. $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq 0)$

22. $[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}(f'(x)\neq 0)$

23. 设 $y=f(u),u=g(x)$,则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=f'(u)g'(x),\quad 或[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$$

下面我们介绍,如何利用导数公式直接计算复合函数的导数,而不必写出中间变量 u。

设导数公式为 $f'(x)=h(x)$,求 $y=f(g(x))$的导数 y'。

由上述公式 23,有

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)=h(g(x))\cdot g'(x)$$

例如:$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'$

$$(\sin\ln x)'=\cos\ln x\cdot(\ln x)'$$

$$(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

现在,我们可以利用上面导数公式,求出任意一个初等函数的导数。

例 2.2.11　设 $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$,求 y'。

解　$y'=[\ln\cos(10+3x^2)]'=\frac{1}{\cos(10+3x^2)}[\cos(10+3x^2)]'$

$$=-\frac{\sin(10+3x^2)}{\cos(10+3x^2)}\cdot(10+3x^2)'=-\tan(10+3x^2)\cdot(0+6x)$$

$$=-6x\tan(10+3x^2)$$

例 2.2.12　设 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$,求 y'。

解　$y'=[e^{\sin^2\frac{1}{x}}]'=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\left[\sin^2\frac{1}{x}\right]'=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\left[\sin\frac{1}{x}\right]'$

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}$$

例 2.2.13 设 $y=3x^2\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$,求 y'。

解 $y'=[3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}]'=[3x^3\arcsin x]'+[(x^2+2)\sqrt{1-x^2}]'$

$$\begin{aligned}
&=(3x^3)'\cdot\arcsin x+3x^3(\arcsin x)'\\
&\quad+(x^2+2)'\sqrt{1-x^2}+(x^2+2)(\sqrt{1-x^2})'\\
&=9x^2\arcsin x+\frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'\\
&=9x^2\arcsin x+\frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2}-\frac{x^3+2x}{\sqrt{1-x^2}}\\
&=9x^2\arcsin x
\end{aligned}$$

例 2.2.14 设 $f(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant 1\\ x^2+1 & 1<x\leqslant 2\\ \frac{1}{2}x+4 & 2<x\end{cases}$,求 $f'(x)$。

解 当 $x<1$ 时,$f'(x)=(2x)'=2$

当 $1<x<2$ 时,$f'(x)=(x^2+1)'=2x$

当 $x>2$ 时,$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x+4\right)'=\frac{1}{2}$

当 $x=1$ 时,由例 2.1.6 知,$f'(1)=2$;

当 $x=2$ 时,由例 2.1.6 知,$f'(x)$在 $x=2$ 不可导。

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ 2 & x=1\\ 2x & 1<x<2\\ \frac{1}{2} & x>2\end{cases}=\begin{cases}2 & x\leqslant 1\\ 2x & 1<x<2\\ \frac{1}{2} & x>2\end{cases}$$

例 2.2.15 设 $y=xa^x+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})(a>0,a\neq 1)$,求 $y'|_{x=0}$。

解 $y'=[xa^x+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]'=(xa^x)'+[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]'$

$$\begin{aligned}
&=a^x+xa^x\ln a+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}[x+\sqrt{x^2+a^2}]'\\
&=a^x+xa^x\ln x+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]\\
&=a^x+xa^x\ln x+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\\
&=a^x+xa^x\ln a+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}
\end{aligned}$$

$$y'|_{x=0}=\left(a^x+xa^x\ln a+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\Bigg|_{x=0}=1+\frac{1}{a}$$

2.2.5 隐函数求导法则

两个变量之间的对应关系如果由表达式 $y=f(x)$给出,这种形式的函数叫作显函数。

两个变量之间的对应关系如果由一个方程 $F(x,y)=0$ 所确定，这种形式的函数叫作隐函数。也就是说，如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一确定值时，相应地总有满足方程的唯一的 y 值存在，那么就称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间上确定了 y 是 x 的一个隐函数。

可以利用复合函数求导法则来求出隐函数的导数。例如，方程 $y-x^3+e^y=0$ 确定了 y 是 x 的一个隐函数，为了求 y 对 x 的导数，我们将方程两边对 x 求导，则有

$$y'-3x^2+e^y\cdot y'=0$$

即得到
$$y'=\frac{3x^2}{1+e^y}$$

由此可见，隐函数的求导办法是：

(1) 将方程 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导，注意在求导过程中视 y 为 x 的函数。

(2) 求导之后得到一个关于 y'的方程，解此方程求出 y'的表达式，在此表达式中允许含有 y。

例 2.2.16　求方程 $e^y-e^x+xy=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$的导数。

解　方程两边分别对 x 求导数，注意 y 是 x 的函数，得

$$y+xy'-e^x+e^yy'=0\Rightarrow(x+e^y)y'=e^x-y$$

当 $x+e^y\neq0$ 时，有

$$y'=\frac{e^x-y}{x+e^y}$$

例 2.2.17　求抛物线 $y^2=4x$ 在点(1,2)处的切线方程。

解　先求切线的斜率，方程两边对 x 求导，得

$$2y\cdot y'=4$$

即有
$$y'=\frac{2}{y}$$

可见在点(1,2)处的切线斜率为

$$k_{切}=y'\big|_{x=1}=\frac{2}{y}\bigg|_{(1,2)}=1$$

因此，所求的切线为
$$y-2=x-1$$
即
$$y=x+1$$

评注　用隐函数的求导方法可以给求切线的斜率带来方便。

2.2.6　对数求导法则

形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的函数称为幂指函数，直接使用前面介绍的求导法则不能求出幂指函数的导数，对于这类函数，可以先在函数两边取对数，然后在等式两边同时对自变量 x 求导，最后解出所求导数，我们把这种方法称为对数求导法。

下面通过例题介绍这种方法。

例 2.2.18　设 $y=x^{\sin x}(x>0)$，求 y'。

解　这个函数是幂指函数，为了求这函数的导数，可以先在两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

上式两边对 x 求导，有

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

解出 y'得到

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &= x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

评注 用对数求导法在等式两端取对数时，一般取自然对数。

例 2.2.19 设 $y=x^{x^3}$，求 y'。

解 $y'=(x^{x^3})'=(\mathrm{e}^{x^3\ln x})'=\mathrm{e}^{x^3\ln x}(x^3\ln x)'=\mathrm{e}^{x^3\ln x}(3x^2\ln x+x^2)$

例 2.2.20 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)}}$，求 y'。

解 将方程两端取对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}\mid \ln(x-1)+\ln(x+3)-\ln(x-2)-\ln(x+5)\mid$$

上式两边对 x 求导，有

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+5}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+5}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+5}\right)\end{aligned}$$

评注 本例如果直接用复合函数求导法则求这个函数的导数是很复杂的，而使用对数求导法可使运算级别降低，从而比较方便，对数求导法适宜于多个函数的乘积、商、乘方、开方及幂指函数的求导。

习题 2.2

1. 求下列函数的导数。

(1) $y=3x^2-\dfrac{2}{x^2}+5$　　(2) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$　　(4) $y=x^2\cos x$

(5) $y=2\tan x+\sec x-1$　　(6) $y=a^x+\mathrm{e}^x$

2. 求下列复合函数的导数。

(1) $y=\sqrt{a^2-x^2}$　　(2) $y=\ln\cos x$

(3) $y=\sqrt{1+\ln x^2}$　　(4) $y=\sin^n x\cos nx$

(5) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；　　(6) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

3. 求由下列方程所确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

(1) $x+3x^7-2y-y^5=0$　　(2) $y+x\mathrm{e}^y=1$

(3) $e^{x+y}-xy=1$,求 $y|_{x=0}$　　(4) $x-\sin\dfrac{y}{x}+\tan a=0$

(5) $\cos(x^2+y)=x$　　(6) $ye^x+\ln y=1$

(7) $e^{xy}+y\ln x-\cos 2x=0$

4. 利用对数求导法则求下列函数的导数。

(1) $y=x^{e^x}$　　(2) $y=2x^{\sqrt{x}}$

(3) $y=(\sin x)^x$　　(4) $y=(\sin x)^{\ln x}$

(5) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$　　(6) $y=x^{x^x}$

(7) $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

5. 求下列分段函数的导数。

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leqslant 0\\ xe^x & x>0\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2} & x\leqslant 1\\ 2-x & x>1\end{cases}$

6. 求曲线 $y=(x+1)\sqrt{3x}$ 在点(2,3)处的切线方程。

7. 求曲线 $x^2+y^2+xy=4$ 上点(2,−2)处的切线方程。

8. 抛物线 $y=x^2$ 在何处的切线平行于直线 $y=4x-5$,在何处的切线垂直于直线 $2x-6y+5=0$。

9. 设 $y=\dfrac{2x^3-3x+\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x}}$,求 $y'|_{x=\frac{1}{4}}$。

10. 求下列各函数的导数。

(1) $y=f(e^x)e^{f(x)}$,求 y'_x

(2) $y=f(e^x+x^e)$,求 y'_x

2.3　高阶导数与参数式函数的导数

2.3.1　高阶导数

一般地,函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数仍是 x 的函数,如果 $f'(x)$ 在点 x 处可导,则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数,记为

$$f''(x),\quad y'',\quad \frac{d^2y}{dx},\quad \frac{d^2f}{dx}\quad 或\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

类似地,二阶导数 $f''(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数,记为

$$f'''(x),\quad y''',\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^3f}{dx^3}\quad 或\frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

……

$(n-1)$阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数,记为

$$f^{(n)}(x),\quad y^{(n)},\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \frac{d^nf}{dx^n}\quad 或\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

当 $n=0$ 时，$f^{(0)}=f(x)$。二阶及其以上的各阶导数统称为高阶导数。函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的各阶导数就是其各阶导函数在点 x_0 处的值，即

$$f'(x_0),f''(x_0),f'''(x_0),f^{(4)}(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)$$

或

$$y'\big|_{x=x_0},y''\big|_{x=x_0},y'''\big|_{x=x_0},y^{(4)}\big|_{x=x_0},\cdots,y^{(n)}\big|_{x=x_0}$$

由高阶导数的意义可知，就是利用 2.2 节中的求导法则及导数公式，对函数逐阶进行求导。

例 2.3.1 求下列函数的高阶导数。

(1) $y=e^x\cos x$，求 y'' 和 y'''　　(2) $y=x^x$，求 y''

(3) $y=f(\sin x)$，求 y''_x　　(4) 设 $x^2+y^2=a^2$，求 y''_x

解 (1) $y'=(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x$

$y''=(e^x\cos x-e^x\sin x)'=(e^x\cos x-e^x\sin x)-(e^x\sin x+e^x\cos x)=-2e^x\sin x$

$y'''=[-2e^x\sin x]'=-2(e^x\sin x)'=-2(e^x\sin x+e^x\cos x)$

(2) $y'=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$

$y''=[x^x(\ln x+1)]'=(x^x)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$

(3) $y'=[f(\sin x)]'=f'(\sin x)(\sin x)'=f'(\sin x)\cos x$

$y''=[f'(\sin x)\cos x]'=[f'(\sin x)]'\cos x+f'(\sin x)(\cos x)'$

$=f''(\sin x)\cos^2x-f'(\sin x)\sin x$

(4) 把方程两边对 x 求导，得 $2x+2yy'=0$

所以

$$y'=-\frac{x}{y}$$

$$y''=\left(-\frac{x}{y}\right)'=-\frac{x'\cdot y-x\cdot y'}{y^2}$$

$$=-\frac{y-x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

$$=-\frac{a^2}{y^3}$$

例 2.3.2 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$。

(1) $y=e^{ax}$　　(2) $y=x^n$

(3) $y=\sin x$　　(4) $y=xe^x$

解 (1) $y'=(e^{ax})'=ae^{ax}$

$y''=(ae^{ax})'=a(e^{ax})'=a^2e^{ax}$

$y'''=(a^2e^{ax})'=a^2(e^{ax})'=a^3e^{ax}$

…

由归纳法，得 $y^{(n)}=(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$

特例 $(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $y'=(x^n)'=nx^{n-1}$

$y''=(nx^{n-1})'=n(n-1)x^{n-2}$

$y^{(n)}=[n(n-1)x^{n-2}]'=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

…

由归纳法，得 $y^{(n)}=(x^n)^{(n)}=n!\cdot x^{n-n}$

(3) $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$

$y'''=\left[\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

…

由归纳法，得 $y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$

(4) $y'=(xe^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$y''=[(1+x)e^x]'=1\cdot e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

$y'''=[(2+x)e^x]'=1\cdot e^x+(2+x)e^x=(3+x)e^x$

…

由归纳法，得 $y^{(n)}=(xe^x)^{(n)}=(n+x)e^x$

评注　求 n 阶导数时，一般总是逐阶求导数，再从中找出规律。

例 2.3.3　设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 $y''|_{x=1}$。

解　$y'=[(1+x^2)\arctan x]'=2x\arctan x+1$

$y''=(2x\arctan x+1)'=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$

所以

$$\begin{aligned} y''|_{x=1} &= \left(2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}\right)\Big|_{x=1} \\ &= 2\arctan 1+\frac{2\times 1}{1+1^2} \\ &= \frac{\pi}{2}+1 \end{aligned}$$

2.3.2　参数式函数的导数

一般地，设 t 为参数，则

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$$

表示平面上一条曲线，当 $\varphi(t)$ 满足一定条件时，上式就确定 y 与 x 之间的函数关系，这种函数称为由参数方程确定的函数，即参数式函数。

下面寻求直接由参数方程求导的方法。

设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，于是根据复合函数及反函数的求导，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

这就是参数式函数的导数公式。

例 2.3.4　求椭圆$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$($t$ 为参数)在 $t=\frac{\pi}{3}$的对应点处的切线方程。

解　当 $t=\frac{\pi}{3}$时,$x=\frac{a}{2}$,$y=\frac{\sqrt{3}}{2}b$,所以要求的切线的切点 M_0 的坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$。

下面求切线的斜率

$$k_{切}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{y'_t}{x'_t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}b}{3a}$$

因此所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{\sqrt{3}b}{3a}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

评注　用参数式函数的导数公式可以给求用参数函数表示的曲线的切线方程带来方便。

例 2.3.5　求由参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$确定的函数 $y=y(x)$的导数。

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\dfrac{t}{2}$

例 2.3.6　求由参数方程$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$所确定的函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

习题 2.3

1. 求下列函数的二阶导数。

(1) $y=x\ln x$　　(2) $y=\cos x+\tan x$

(3) $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$　　(4) $y=\sin(x+y)$

(5) $y=xe^{x^2}$　　(6) $xy+e^y=1$

2. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$。

(1) $y=a^x(a>0,a\neq 1)$　　(2) $y=\cos x$

(3) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$　　(4) $y=\ln(1+x)$

3. 设 $y=f(x^2+a)$,求 y''_x。

4. (1) 设 $xy-\sin(\pi y^2)=0$,求 $y'|_{\substack{x=0\\y=1}}$,$y''|_{\substack{x=0\\y=1}}$。

(2) 设 $y-xe^y=1$,求 $y''|_{x=0}$。

5. 证明函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$。

6. 求参数方程$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\x=a\sin^3\theta\end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$及二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

7. 求曲线$\begin{cases}x=t^2-2\\y=3t^2+1\end{cases}$在 $t=1$ 相应点处的切线方程。

2.4　微　　分

2.4.1　微分概念

如果我们已知函数 $y=f(x)$在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$,欲求 $f(x)$在点 x_0 附近一点 $x_0+\Delta x$ 的函数值 $f(x_0+\Delta x)$,常常很难求得 $f(x_0+\Delta x)$的精确值。但是,在实际应用中,只要求出 $f(x_0+\Delta x)$的近似值也就够用了。为此,我们讨论计算 $f(x_0+\Delta x)$近似值的方法。

因为已知 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)$,或 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y$,所以只要能近似地计算出 Δy 即可。由于 Δy 是 Δx 的函数,我们可以用一个计算简便的关于 Δx 的函数近似代替 Δy,并使其误差满足我们的要求。在所有关于 Δx 的函数中,一次函数的计算最为简便。因此,用 Δx 的一次函数 $A\Delta x$(A 为常数)近似代替 Δy,所产生的误差是 $\Delta y-A\Delta x$。如果 $\Delta y-A\Delta x=0(\Delta x\to 0)$,那么一次函数 $A\Delta x$ 就有特殊的意义。

定义 2.4.1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,对自变量 x 在点 x_0 的增量 Δx,函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)\tag{2-6}$$

其中,A 为与 Δx 无关的常数,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处可微,称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分,记为

$$dy|_{x=x_0}=A\Delta x,\quad 或\ df(x_0)=A\Delta x$$

称 $A\Delta x$ 为 Δy 的线性主要部分。“线性”是因为 $A\Delta x$ 是 Δx 的一次函数,“主要”是因为式(2-6)右端 $A\Delta x$ 比 Δx 是高阶无穷小,所以在式(2-6) 的右端 $A\Delta x$ 起主要作用。

由定义,有

$$\Delta y=dy|_{x=x_0}+o(\Delta x)\tag{2-7}$$

$$\Delta y-dy|_{x=x_0}=o(\Delta x)\tag{2-8}$$

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \mid_{x=x_0} \tag{2-9}$$

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微,那么,如何确定微分系数 A? 下面的定理既回答了可微与可导的关系,又回答了这个问题。

定理 2.4.1 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,且有 $A=f'(x_0)$。

由定理 2.4.1 可以得到用导数计算微分的计算公式:

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x \tag{2-10}$$

称 $y=f(x)$在点 x 处的微分为 $y=f(x)$的微分函数,简称为微分,记为 $\mathrm{d}y$,且有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \tag{2-11}$$

由于 $\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$,即自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 与自变量 x 的增量 Δx 相等,于是有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \tag{2-12}$$

即函数的微分就是函数的导数与自变量的微分之乘积。由式(2-12)有

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

以前,我们曾用$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$表示过导数,那时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$是一个完整的记号,并不具有商的意义。在引进微分概念之后,符号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$表示的是函数的微分与自变量的微分的商,所以称导数为微商。

例 2.4.1 求函数 $y=x^2$ 当 x 由 1 改变到 1.01 时的增量与微分。

解 (1) 函数的增量

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 1.01^2 - 1^2 = 0.0201$$

(2) 函数的微分

$$\mathrm{d}y = (x^2)'\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x$$

当 $x=1,\Delta x=0.01$ 时,有

$$\mathrm{d}y = 2 \times 1 \times 0.01 = 0.02$$

例 2.4.2 求函数 $f(x)=x^2+3x+5$ 在 $x=2$ 处的微分。

解 $\because f'(x)=(x^2+3x+5)'=2x+3$

$\therefore f'(x)=(2x+3)|_{x=2}=7$

于是,有 $\mathrm{d}f(2)=f'(2)\ \mathrm{d}x=7\mathrm{d}x$。

例 2.4.3 设 $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$,求 $\mathrm{d}y$。

解 因为

$$\begin{aligned} y' = (\sqrt{1+\sin^2 x})' &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}(1+\sin^2 x)' \\ &= \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}y=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$。

例 2.4.4 设 $x\mathrm{e}^y-\ln y+5=0$,求 $\mathrm{d}y$。

解 把方程两边对 x 求导,得

$$(x\mathrm{e}^y)' - (\ln y)' + 0 = 0$$

$$1 \cdot e^y + xe^y \cdot y' - \frac{1}{y} \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{ye^y}{1 - xye^y}$$

所以 $dy = \frac{ye^y}{1-xye^y}dx$。

2.4.2　微分法则和微分公式

由基本初等函数的导数公式，可以直接写出基本初等函数的微分公式，为了便于对照，见表 2-1。

表　2-1

导数公式	微分公式
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}dx$
$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}dx$

由函数的和、差、积、商的求导法则，可推得相应的微分法则，为了便于对照，列成表 2-2（表中 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导）。

表　2-2

函数的和、差、积、商的求导法则	函数的和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$

2.4.3 微分形式的不变性

设函数 $y=f(x)$在点 x 处可微,则:

(1) 当 x 为自变量时,有

$$dy = f'(x)dx$$

(2) 当 x 为中间变量时,设 $x=\varphi(t)$,且 $\varphi(t)$可导,那么复合函数 $y=f[\varphi(t)]$的微分为

$$\begin{aligned} dy &= \{f[\varphi(t)]\}' = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \\ &= f'[\varphi(t)]d(t) = f'(x)dx \end{aligned}$$

即

$$dy = f'(x)dx$$

由此可见,不论 x 是自变量,还是中间变量,函数 $y=f(x)$的微分形式总是 $dy=f'(x)dx$,称这个性质为微分形式的不变性。

由微分形式不变性,我们有:

$$df(x) = f'(x)dx \Leftrightarrow df[\varphi(x)] = f'[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

即可以利用微分公式求复合函数的微分。

例 2.4.5 设 $y=e^{\sin^2 x}$,求 dy。

解 $dy = e^{\sin^2 x}d(\sin^2 x)=e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x d\sin x$

$= e^{\sin^2 x}2\sin x \cdot \cos dx = e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$

例 2.4.6 设 $y=\ln(x^2+1)$,求 dy。

解 $dy=d\ln(x^2+1)=\dfrac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$

例 2.4.7 设 $y=e^{-x}\sin 3x$,求 dy。

解 $dy = d(e^{-x}\sin 3x)=\sin 3x \cdot d(e^{-x})+e^{-x} \cdot d\sin 3x$

$= -e^{-x}\sin 3x dx+e^{-x}\cos 3x \cdot 3dx$

$= e^{-x}(3\cos 3x-\sin 3x)dx$

2.4.4 微分在近似计算上的应用

由微分定义,有近似公式:

(1) $\Delta y \approx dy|_{x=x_0}$($|\Delta x|$很小时)

由 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,$dy|x=x_0=f'(x_0)\Delta x$,由(1)得

(2) $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$($|\Delta x|$很小时)

在(2)中,令 $x=x_0+\Delta x$,得

(3) $f'(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ ($|x-x_0|$很小时)

在(3)中,令 $x_0=0$,得

(4) $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ ($|x|$很小时)

例 2.4.8 有一种金属圆片,半径为 20cm,加热后,其半径增大了 0.01cm,求该金属圆片面积增加的精确值和近似值。

解　设圆的半径为 r cm，则圆的面积为 $A=f(r)=\pi r^2$

当 $r=20\text{cm}$，$\Delta r=0.01\text{cm}$ 时，圆片面积增加的精确值为

$$\begin{aligned}\Delta A &= f(20+0.01)-f(20)=f(20.01)-f(20)\\ &=\pi\times 20.01^2-\pi\times 20^2=0.4001\pi(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

面积增大的近似值为

$$\Delta A\approx \mathrm{d}A=(\pi r^2)'\mathrm{d}r=2\pi r\mathrm{d}r=2\pi\times 20\times 0.01=0.4\pi(\text{cm}^2)$$

例 2.4.9　求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值。

解　设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，则 $f(1.02)=\sqrt[3]{1.02}$，取 $x_0=1$，则 $\Delta x=1.02-1=0.02$，$f(1)=\sqrt[3]{1}$，由 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，有 $f'(1)=\dfrac{1}{3}$，于是，应用上述近似公式(2)，有

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&=f(1.02)=\sqrt[3]{1.02}\\ &\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=1+\frac{1}{3}\times 0.02\\ &\approx 1.0067\end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1.0067$$

例 2.4.10　证明近似公式

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}\quad(|x|\text{很小})$$

并由此计算 $\sqrt[4]{255}$ 的近似值。

证明：$f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$，$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{n}$，于是，由近似公式(4)，有

$$f(x)=\sqrt[n]{1+x}\approx f(0)+f'(0)x=1+\frac{x}{n}$$

即

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}\quad(|x|\text{很小})$$

从而，有

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{255}&=\sqrt[4]{256-1}=\sqrt[4]{256\times\left(1-\frac{1}{256}\right)}\\ &=4\times\sqrt[4]{1-\frac{1}{256}}\approx 4\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{256}\right)\\ &\approx 3.996\end{aligned}$$

即 $\sqrt[4]{255}\approx 3.996$。

类似地，可以证明当 $|x|$ 很小时，下列近似公式成立：

$\sin x\approx x$；$\tan x\approx x$；$e^x\approx 1+x$；$\ln(1+x)\approx x$。

2.4.5　微分的几何意义

设曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x,y)$ 点处的切线为 MT，点 $N(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为曲线上点 M

的邻近点,如图 2-2 所示。切线 MT 的斜率是 $k=\tan\alpha=f'(x)$,不难看出,$PQ=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x)=\mathrm{d}y$。

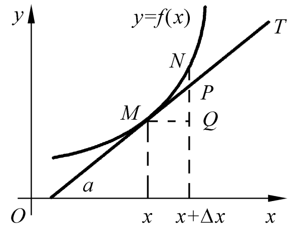


图 2-2

因此,函数 $y=f(x)$的微分 $\mathrm{d}y$ 在几何上表示了当自变量 x 改变了 Δx 时切线上相应点纵坐标的改变量,图 2-2 中 $NQ=\Delta y$,它是当自变量 x 改变了 Δx 时曲线上相应点切线纵坐标的改变量。

习题 2.4

1. 求下列函数的微分。

(1) $y=x\ln x-x^2$ (2) $y=x\arctan\sqrt{x}$

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ (4) $y^2\cos x=a^2\sin 3x$

(5) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ (6) $y=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^3$

(7) $y=x+\ln y$ (8) $y=f(x^3+2)$

2. 测量一正方形台子的面积,测得边长是 2.4m,测量的误差是 5cm,试问测得台子面积的误差的精确值和近似值各为多少?

3. 当 x 很小时,用函数的微分证明近似公式 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{3}$,并用此公式求 $\sqrt[3]{9}$ 的近似值(精确到小数点后三位)。

4. 用微分公式计算 arctan1.02 的近似值(精确到小数点后三位)。

第 2 章习题参考答案

习题 2.1

1. 冷却速度为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t)$

2. (1) $-f'(x_0)$,(2) $f'(0)$,(3) $2f'(x_0)$,(4) $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$

3. (1) $y'=a$ (2) $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

4. (1) $y'(1)=y'(2)=a$ (2) $y'(1)=-1$,$y'(2)=-\dfrac{1}{4}$

5. $f'(a)=\varphi(a)$

6. $f'(0)=24$

7. 连续,不可导

8. 连续,不可导

9. 不连续,不可导

10. $f'(0)=1$

11. 在 $x=0$ 处,连续,不可导;在 $x=1$ 处,连续,可导;在 $x=2$ 处,不连续,不可导。

12. 4

13. $x+y-3=0$

14. $-x+\frac{\pi}{2}$

15. $a=2\quad b=1$

习题 2.2

1. (1) $6x+4x^{-3}$　　(2) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\frac{-2}{(1+x)^2}$　　(4) $2x\cos x-x^2\sin x$

2. (1) $y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　(2) $y'=-\tan x$

(3) $y'=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$　　(4) $y'=n\sin^{n-1}x\cos x(n+1)x$

(5) $y'=\frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$　　(6) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$

3. (1) $\frac{21x^6+1}{5y^4+2}$　　(2) $-\frac{\mathrm{e}y}{1+x\mathrm{e}^y}$

(3) -1　　(4) $\left(x^2+y\cos\frac{y}{x}\right)x\cos\frac{y}{x}$

(5) $-\frac{2x\sin(x^2+y)+1}{\sin(x^2+y)}$　　(6) $-\frac{y^2\mathrm{e}^x}{1+y\mathrm{e}^x}$

(7) $-\frac{y+2x\sin 2x+yx\mathrm{e}^{xy}}{x^2\mathrm{e}^{xy}+x\ln x}$

4. (1) $\mathrm{e}^x\cdot x\mathrm{e}^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$　　(2) $(2x)\sqrt{x}\cdot(2x)^{\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\ln 2x}{2\sqrt{x}}$

(3) $(\sin x)^x(x\cot x+\ln\sin x)$

(4) $(\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\sin x}{x}+\cot x\cdot\ln x\right)$

(5) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}\right]$

(6) $x^x(\ln x+1)$

(7) $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right]$

5. (1) $f'(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x & x>0\end{cases}$

(2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$

6. $x+2y-8=0$

7. $x-y-4=0$

8. (1) $x=2$ (2) $x=-\dfrac{3}{2}$

9. $45\dfrac{1}{2}$

10. (1) $y'_x=e^x f'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}\cdot f'(x)$

(2) $(e^x+ex^{e-1})f'(e^x+x^e)$

习题 2.3

1. (1) $\dfrac{1}{x}$ (2) $2\sec^2 x\tan x-\cos x$

(3) $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$ (4) $\sin(x+y)/[\cos(x+y)-1]^3$

(5) $(4x^3+6x)e^{x^2}$ (6) $[2xy-e^y](y^2-2y)/(x+e^y)^3$

2. (1) $a^x(\ln a)^n$ (2) $\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(3) $a_0\cdot n!$ (4) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)}{(1+x)^n}$

3. $2f'(x^2+a)+4x^2f''(x^2+a)$

4. (1) $-\dfrac{1}{2\pi}$; $-\dfrac{1}{4\pi^2}$ (2) $2e^2$

6. $\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{3a\sin\theta\cos^4\theta}$

7. $3x-y+7=0$

习题 2.4

1. (1) $(\ln x-2x+1)dx$ (2) $\left[\arctan\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\right]dx$

(3) $\csc x dx$ (4) $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}dx$

(5) $e^{\sin x}\cos x dx$ (6) $3(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})dx$

(7) $\dfrac{y}{y-1}dx$ (8) $3x^2f'(x^3+2)dx$

2. $0.2425m^2$; $0.24m^2$

3. 2.084

4. 0.795

第 3 章　微分中值定理与导数的应用

上一章介绍了微分学的两个基本概念——导数与微分及其运算。本章将以微分学的基本定理——微分中值定理为理论依据，介绍导数在研究函数和经济问题中的有关应用。

3.1　微分中值定理

3.1.1　罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$；

则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

罗尔定理的几何意义是：如果 AB 是一条连续的曲线弧，除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，且两个端点的纵坐标相等，那么在曲线弧 AB 上至少存在一点 $C(\xi,f(\xi))$，在该点处曲线的切线平行于 x 轴，如图 3-1 所示(图示的函数存在两点 ξ_1 和 ξ_2)。

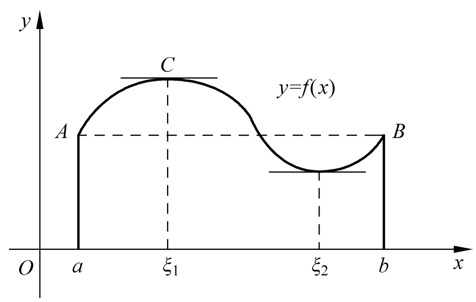


图　3-1

注意：定理的三个条件是结论的充分条件，即如果缺少某一条件，结论就可能不成立。不过即使三个条件都不满足，结论中的 ξ 仍可能存在。

罗尔定理常被用来判别函数 $f'(x)$ 的零点。

例 3.1.1　验证函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上满足罗尔定理，并求定理中 ξ 的值。

解　因为 $f(x)$ 是初等函数，它在定义区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上连续，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上可导，且

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

又

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

综上所述，$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上满足罗尔定理条件。令 $\cot\xi=0$，得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，即为所求。

评注 按罗尔定理三条件检查，然后解方程 $f'(\xi)=0,\xi\in(a,b)$。

例 3.1.2 不求导数，判别函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数方程(即 $f'(x)=0$)有几个实根，以及它们所在范围。

解 由于 $f(x)$ 为多项式函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导数，且 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$，$[1,2]$，$[2,3]$ 上均满足罗尔定理的三个条件，那么根据罗尔定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ_1，使得 $f'(\xi_1)=0$，即 ξ_1 为 $f'(x)=0$ 的一个实根，$\xi_1\in(0,1)$；

在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ_2，使得 $f'(\xi_2)=0$，即 ξ_2 为 $f'(x)=0$ 的一个实根，$\xi_2\in(1,2)$；

在 $(2,3)$ 内至少存在一点 ξ_3，使得 $f'(\xi_3)=0$，即 ξ_3 为 $f'(x)=0$ 的一个实根，$\xi_3\in(1,2)$；

又 $f'(x)=0$ 为三次方程，至多有三个实根，故 $f'(x)=0$ 恰有三个实根，它们分别在 $(0,1)$，$(1,2)$ 及 $(2,3)$ 内。

3.1.2 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \xi\in(a,b)$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

显然，罗尔定理是拉格朗日中值定理当 $f(a)=f(b)$时的特殊情形。

如图 3-2 所示，拉格朗日中值定理的几何意义是：如果连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 AB 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那么在弧 AB 上至少有一点 $C(\xi,f(\xi))$，该点处切线平行于割线 AB。

例 3.1.3 验证函数 $f(x)=x^2+2x$ 在$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理的条件，并求定理中 ξ 的值。

解 显然 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，又 $f'(x)=2x+2$，显然 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内可导，故 $f(x)$ 在$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理的条件。根据拉格朗日中值定理，得

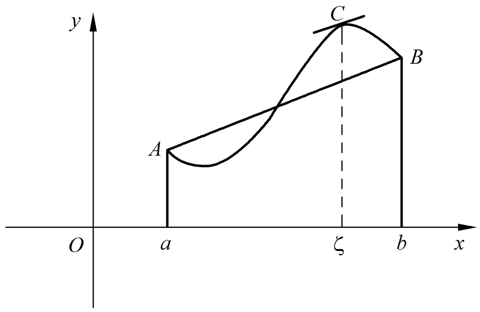


图　3-2

$$f(2)-f(0)=f'(\xi)[2-0]=(2\xi+2)\times 2$$

所以 $\xi=1\in(0,2)$。

评注　按拉格朗日中值定理的条件检查，然后解方程$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$。

推论 1　如果在开区间(a,b)内，$f'(x)=0$ 恒成立，则 $f(x)$在(a,b)内恒为常数。

例 3.1.4　试证明：$\arctan x+\text{arcccot}\ x=\frac{\pi}{2}$，$(-\infty<x<+\infty)$

证明：设 $f(x)=\arctan x+\text{arccot}\ x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,(-\infty<x<+\infty)$$

依推论 1，

$$f(x)=C,(C\text{ 为常数}),(-\infty<x<+\infty)$$

因为 $f(0)=\arctan 0+\text{arccot}0=\frac{\pi}{2}$，因此 $C=\frac{\pi}{2}$，即

$$\arctan x+\text{arccot}x=\frac{\pi}{2},(-\infty<x<+\infty)$$

推论 2　如果在开区间(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内两个函数仅差一个常数，即

$$f(x)=g(x)+C,(C\text{ 为常数})$$

例 3.1.5　证明：当 $0<b\leqslant a$ 时，不等式$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$成立。

解　原不等式可写为

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln a-\ln b\leqslant\frac{a-b}{b},0<b\leqslant a \tag{3-1}$$

设 $f(x)=\ln x$，则

$$f(a)-f(b)=\ln a-\ln b$$

因为 $f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，所以由拉格朗日定理，有

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\quad 0<b<\xi<a$$

即

$$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),\quad 0<b<\xi<a$$

因为

$$0<b<\xi<a$$

所以 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$,代入式(3-1)中得

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b},0<b<a$$

当 $0<b=a$ 时,有$\frac{a-b}{b}=\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{b}=0$,故

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b},0<b\leqslant a$$

评注 用拉格朗日中值定理证明不等式 $D<A-B<C,x\in\mathbf{I}$,方法如下:

(1) 化原不等式为同解不等式,使不等式中出现两项差 $A-B$,设 $f(x)=?$ 则 $f(b)-f(a)=A-B$。

(2) 当 $x\in\mathbf{I}$ 时,验证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件,并写出拉格朗日中值公式:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b) \tag{3-2}$$

(3) 对导数 $f'(\xi)$ 进行估值,得 $0<F<f'(\xi)<E$,代入式(3-2),得

$$D=F(b-a)<f(b)-f(a)<E(b-a)=C$$

即 $D<A-B<C$。

3.1.3 柯西中值定理

若函数 $f(x),g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,且 $g'(x)\neq0$;

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(a,b)$$

例 3.1.6 验证函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足柯西定理的条件,并求定理中 ξ 的值。

解 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是初等函数,在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上都有定义,从而都连续,又 $f'(x)=\cos x$ 与 $g'(x)=-\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内都存在,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导,且

$$g'(x)=-\sin x\neq0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足柯西定理的条件。根据柯西定理,得

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad 0<\xi<\frac{\pi}{2} \tag{3-3}$$

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,f(0)=0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,g(0)=1,f'(\xi)=\cos\xi,g'(\xi)=-\sin\xi$,代入式(3-3),有

$$\frac{1-0}{0-1}=\frac{\cos\xi}{-\sin\xi},\quad 0<\xi<\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\cot\xi=1,0<\xi<\frac{\pi}{2}$$

所以 $\xi=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。

评注　按柯西中值定理三条件逐条检验，然后解方程$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，$\xi\in(a,b)$，求 ξ 的值。

习题 3.1

1. 函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间$[-1,2]$上是否满足罗尔定理的所有条件？如果满足，请找出定理中的数值 ξ，即满足 $f'(\xi)=0$ 的点 ξ。

2. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上的正确性。

3. 不求导数，判断函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的导数有几个实根，并指出它们所在的区间。

4. 设 $f(x)=\arctan x$，$x\in[0,1]$，求使拉格朗日中值公式成立的 ξ 的值。

5. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=x^3$ 在区间$[0,1]$上的正确性。

6. 证明不等式：$|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$。

7. 证明：若 $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$，$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是常数，则方程 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根。

8. 证明恒等式：$2\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$x\in[-1,1]$。

3.2　洛必达法则

我们约定用“0”表示无穷小，用“∞”表示无穷大。在第 2 章里我们知道，两个无穷小量之比为$\frac{0}{0}$，或两个无穷大量之比为$\frac{\infty}{\infty}$的极限，有的存在，有的不存在，我们称这类极限为不定式。

我们约定用“1”表示以 1 为极限的函数，则还有下列五种不定式：

$$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$$

这五种不定式皆可化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型不定式，即

$$0\cdot\infty=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\quad \text{或}\quad 0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty_1-\infty_2=\frac{1}{\frac{1}{\infty_1}}-\frac{1}{\frac{1}{\infty_2}}=\frac{\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_1\infty_2}}=\frac{0}{0}$$

$$1^{\infty}=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$$
$$0^{0}=e^{0\cdot\ln 0}=e^{0\cdot\infty}$$
$$\infty^{0}=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$$

由此可见，$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型是七种不定式中的两个基本类型。用柯西中值定理可以推导出求这两种不定式极限的一种重要方法，称为洛必达法则。

3.2.1 $\frac{0}{0}$型

洛必达法则Ⅰ 如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下面三个条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；

(2) 在点 a 的某个邻域中(点 a 除外)，$f(x)$与 $g(x)$都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$)；

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

推论 如果当 $x\to a$ 时，$\frac{f'(x)}{g'(x)}$仍为$\frac{0}{0}$型不定式的极限，而 $f'(x)$，$g'(x)$仍满足洛必达法则的条件，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

一般地，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

上面推论告诉我们，只要符合推论条件，洛必达法则可以连续使用有限次。对下文介绍的洛必达法则Ⅱ，有相应的推论，将不再重复叙述。

把洛必达法则Ⅰ及推论中的 $x\to a$ 改为 $x\to\infty$，洛必达法则同样有效，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 3.2.1 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-5x-12}{x^3-x^2-4x-6}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-5x-12}{x^3-x^2-4x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{6x-5}{3x^2-2x-4}=\frac{13}{17}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot(-2e^{x^2})\xlongequal{\text{重要极限}}1\times(-2\times1)=-2$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3x}\xlongequal{\text{分子分母分别求导}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2x\cos x}$

$\xlongequal{\text{分离极限存在的因子}}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\dfrac{1}{3\cos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

$\xlongequal{\text{四则运算法则}}1^2\times\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

$\xlongequal{\text{有理化}}\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}$

$\xlongequal{\text{约分}}\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}+1}$

$\xlongequal{\text{代入得}}-\dfrac{1}{6}$

评注　(1) 洛必达法则可以连续使用有限次，每一次使用洛必达法则后，都要对函数进行整理，并检查是否可以继续使用洛必达法则；

(2) 尽量用重要极限；

(3) 及时分离极限存在的因子，用四则运算法则；

(4) 是分子分母分别求导，不是求分式的导数。

3.2.2　$\dfrac{\infty}{\infty}$型

洛必达法则 Ⅱ　如果如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下面三个条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$

(2) 在点 a 的某个邻域中(点 a 可除外)，$f(x)$与 $g(x)$都可导，且 $g'(x)\neq0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$)

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

把 $x\to a$ 改为 $x\to\infty$，同样有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 3.2.2 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^m}{x}$($m$ 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan5x}{\ln\tan3x}$

解 这三题都是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,应用洛必达法则Ⅱ可得:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2x)}{\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}=-1$$

(2) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{m}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{m}{x^{\frac{1}{m}}}=0$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{m}}}\right)^m=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan5x}{\ln\tan3x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{5\sec^25x}{\tan5x}}{\dfrac{3\sec^23x}{\tan3x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{5\tan3x}{3\tan5x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\tan^25x}{1+\tan^23x}=1$

评注 洛必达法则是确定未定式的一种重要且简便的方法,使用洛必达法则时我们应注意检验定理中的条件,然后一般要整理化简;如仍属未定式,可以继续使用,使用中应注意结合运用其他求极限的方法,如等价无穷小替换、作恒等变形、适当的变量代换或两个重要极限等,以简化运算过程。

例 3.2.3 (1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\sin x}$存在吗?能否用洛必达法则求其极限?

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}\sin x}{3+\dfrac{1}{x}\sin x}=\dfrac{2-0}{3+0}=\dfrac{2}{3}$,即极限存在。但不能用洛必达法则求出其极限,因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\sin x}$尽管是$\dfrac{\infty}{\infty}$型,可是若对分子分母分别求导后得$\dfrac{2-\cos x}{3+\cos x}$,由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\cos x}{3+\cos x}$不存在,故不能使用洛必达法则。

（2）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$。

解　这个问题属于$\dfrac{0}{0}$型未定式，但分子求导数后的极限不存在，即有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$$

此时极限不存在，故洛必达法则失效，需用其他方法求此极限。可以如下求出极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=1\times 0=0$$

本例说明，洛必达法则是求$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式极限的一种重要方法，但不是万能方法。

3.2.3　其他不定式

1. 0 · ∞型

例 3.2.4　求$\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$。

解　$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x\,(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

2. ∞－∞型

例 3.2.5　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$。

解　$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}\right)=\frac{1}{2}$$

3. 1^∞ 型

例 3.2.6　求$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$。

解　$$\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}}\overset{\text{用洛必达法则}}{=\!=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+\sin x}(e^x+\cos x)}{1}}=e^2$$

4. 0^0型

例 3.2.7 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$。

解 $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{x}\cdot\tan x} = 0$$

5. ∞^0 型

例 3.2.8 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$。

解 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\ln\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln\frac{1}{x}}} = e^0 = 1$$

习题 3.2

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^3}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0)$

2. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n\in\mathbf{N})$　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}(a>0,n\in\mathbf{N})$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x\tan x}{\tan 3x}$

3. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+\arctan x}{3x^2-\arctan x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{3x-\sin x}$

4. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x$　　(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

5. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$　　(8) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(9) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

6. 下列极限不能使用洛必达法则的有(　　)。

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\operatorname{arccot}x}{x+\operatorname{arccot}x}$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+\sin x}{3x^2-\sin x}$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arccot}x\right)$

3.3 泰勒公式

对于一些比较复杂的函数,为了便于研究,往往希望用一些简单的函数来近似代替这些比较复杂的函数。由于用多项式表示的函数是各类函数中最简单的一种,因此我们经常用多项式来近似表达函数。

在微分的应用中已经知道,当$|x|$很小时,有如下的近似公式:

$$e^x\approx1+x,\quad \tan x\approx x,\quad \ln(1+x)\approx1+x$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子,它的不足之处是:首先是精确度不高,它所产生的误差仅是关于 x 的高阶无穷小量;其次是用它来作近似计算时,不能具体估算出误差大小。下面的泰勒定理就可以解决以上问题。

设函数 $f(x)$在含有 x_0 的开区间内具有直到$(n+1)$阶导数(n 为自然数),记

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

下面就是利用 $p_n(x)$近似表达 $f(x)$的泰勒定理。

定理 3.3.1　(泰勒(Taylor)中值定理)如果函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内具有 $n+1$ 阶导数(n 为自然数),则对任何 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,$f(x)$可

表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{3-4}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3-5}$$

这里 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个值。

证明：根据 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 可知，只需证明

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ξ 在 x_0 与 x 之间即可。

而由假设及 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 可知，$R_n(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，且

$$R_n(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0$$

对两个函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R'_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}$$
$$=\frac{R'_n(\xi_1)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^n}$$

其中 ξ_1 在 x_0 与 x 之间。

再对函数 $R'_n(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)''$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理得

$$\frac{R'_n(\xi)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$
$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

其中 ξ_2 在 x_0 与 ξ_1 之间。

依此方法继续下去，经过 $(n+1)$ 次后，得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中 ξ 在 x_0 与 ξ_n 之间，因此 ξ 在 x_0 与 x 之间。

因 $p_n^{(n+1)}(x)=0$ 且 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$，于是有 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$，即

$$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$$

则由上式得

$$R_n^{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+z}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间。

于是定理得证。

公式(3-4)称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 点的 n 阶泰勒公式，公式(3-5)称为拉格朗日型

余项。

当 $n=0$ 时，泰勒公式变成拉格朗日中值公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

因此，泰勒中值定理是拉格朗日定理的推广。

利用泰勒中值定理可知函数 $f(x)$ 能用多项式近似表示：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

其误差为 $|R_n(x)|$。

若 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有界，则误差 $|R_n(x)|$ 由下式进行估计：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\tag{3-6}$$

并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)}=0$$

其中，$M=\max\limits_{x\in U(x_0,\delta)}|f^{(n+1)}(x)|$。从而可以看出当 $x\to x_0$ 时，误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小，即 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$。式(3-6)称为余项的估计式。

在不需要余项的精确表达式时，n 阶泰勒公式(3-4)的余项 $R_n(x)$ 可以换成 $o[(x-x_0)^n]$，此时公式(3-4)变成：

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n\end{aligned}\tag{3-7}$$

其中，$o[(x-x_0)^n]$ 称为佩亚诺(Peano)型余项，公式(3-7)又称为带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

在泰勒公式(3-4)中，如果取 $x_0=0$，则 ξ 介于 0 与 x 之间，并且令 $\xi=\theta x\,(0<\theta<1)$，这时泰勒公式(3-4)变成如下形式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\,(0<\theta<1)\tag{3-8}$$

公式(3-8)称为带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式。

在公式(3-7)中，如果取 $x_0=0$，则公式(3-7)又成为带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

于是函数 $f(x)$ 可用如下公式近似表示：

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

其误差为 $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$。

例 3.3.1　验证下列函数的带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式。

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)}+R_{2m}(x)$

其中

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1},\quad 0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2m+1}(x)$

其中,

$$R_{2m}(x)=\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2},\quad 0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty)$$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$

其中,

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{-n-1},\quad 0<\theta<1$$

(5) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

其中,

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1}x^{n+1}, 0<\theta<1$$

证明:这里只验证其中三个公式(1)(2)(4),其余的请读者自行证明

(1) 因为

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

代入式(3-8)得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

若以 n 次多项式作为它的近似,则有

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

其误差为

$$|R_n(x)|\leqslant\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

若取 $x=1$,则可得无理数 e 的近似式为

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

其误差为

$$|R_n|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

当 $n=10$ 时，$e\approx 2.718282$，其误差不超过10^{-6}。

（2）因为

$$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x, f^{(4)}(x)=\sin x, \cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

所以

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, f^{(4)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

令 $n=2m$，由式(3-8)得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)}+R_{2m}(x)$$

其中，

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1},\quad 0<\theta<1$$

若取 $m=1$，则得近似公式

$$\sin x\approx x$$

其误差为

$$|R_2|\leqslant\left|\frac{\sin\left(\theta x+\frac{3\pi}{2}\right)}{3!}x^3\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6},\quad 0<\theta<1$$

若 m 分别取 2 和 3，得近似公式

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}\quad 和\quad \sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

其误差依次不超过$\frac{1}{5!}|x|^5$ 和$\frac{1}{7!}|x|^7$。

（4）因为

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}, f''(x)=-1\times(x+1)^{-2},$$
$$f'''(x)=-1\times(-2)(x+1)^{-3},\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)](x+1)^{-n}$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-m}$$

所以

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-1, f'''(0)=2,\cdots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

由式(3-8)得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}$，$0<\theta<1$。

类似地，还可以得到一些常用的带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式。

（1）$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$0<\theta<1$，$x\in(-\infty,+\infty)$

（2）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)}+R_{2m}(x)$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$

(5) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

(6) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

评注 以上结果作为公式记住。

于是我们立即可以得到下面结果：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1(\text{取 } e^x=1+x+o(x))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}(\text{取 } e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1(\text{取 } \sin x=x+o(x))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-1}{x^3}=-\frac{1}{6}(\text{取 } \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1(\text{取 } \sin x=x+o(x))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}(\text{取 } \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))$$

例 3.3.2 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(e^{x^2}-1)}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}-1+\frac{1}{2}x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

解 (1) 因为当 $x\to0$ 时，$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(e^{x^2}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

(2) 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$，$\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$

故

$$\ln(1+x)\ln(1-x)=-x^2-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}-1+\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

(3) 因为

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

所以

$$e^{x^2}+2\cos x-3=\left(\frac{1}{2!}+2\times\frac{1}{4!}\right)x^4+o(x^4)$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\frac{7}{12}$$

评注　一些常用函数的麦克劳林公式也可以给求极限带来方便。

习题 3.3

1. 应用麦克劳林公式，按 x 幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$。
2. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式。
3. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。
4. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x^3+x^3(x^6-6)}{x^9\ln(1+x^6)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$

3.4　函数的单调性与极值

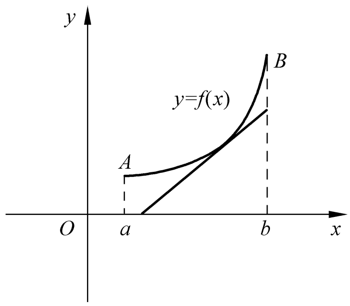
3.4.1　函数的单调性

第 1 章已给出，函数在某个区间内单调定义，现在介绍利用导数判定函数单调性的方

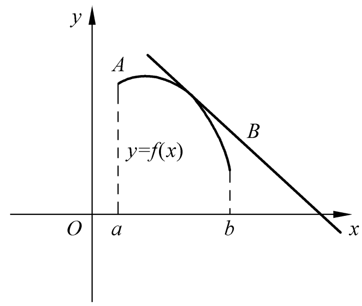
法。根据中值定理可推出下面结论。

定理 3.4.1 设函数 $f(x)$在(a,b)内可导,则 $f(x)$在(a,b)内单调增加(单调减少)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0$($f'(x)\leqslant 0$),$x\in(a,b)$。

从几何直观图形来观察也容易看出上面结论,若区间(a,b)内,曲线 $y=f(x)$是上升的,即函数 $f(x)$是单调增加的,则曲线 $y=f(x)$上每一点的切线斜率都非负,也即 $f'(x)\geqslant 0$,如图 3-3(a)所示;若区间(a,b)内,曲线 $y=f(x)$是下降的,即函数 $f(x)$是单调减少的,则曲线 $y=f(x)$上每一点的切线斜率都非正,也即 $f'(x)\leqslant 0$,如图 3-3(b)所示。



(a) 函数图形上升时切线斜率都非负



(b) 函数图形下降时切线斜率都非正

图 3-3

注意:函数 $f(x)$在(a,b)内严格单调增加(严格单调减少)未必有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$),即只能得出 $f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$)。

定理 3.4.2 若$\forall x\in(a,b)$有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$),则函数 $f(x)$在(a,b)内严格单调增加(或严格单凋减少)。

于是,可按如下的步骤讨论函数 $f(x)$的单调性:

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域;

(2) 求 $f'(x)$,找出使 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$不存在的临界点,这些临界点将定义域分成若干区间;

(3) 列表讨论,用上面的点把 $\mathbf{D}_\mathbf{f}$分成若干个区间,判断 $f'(x)$在每个区间内的符号,确定 $f(x)$在每个区间内的增减性;

(4) 写出 $f(x)$的单调区间。

例 3.4.1 确定函数 $y=x^2-\ln x^2$ 的单调区间。

解 函数 $y=x^2-\ln x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,令 $y'=2x-\dfrac{2}{x}=0$,得$x_1=-1$,$x_2=1$,于是列表(见下表)讨论。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	↘		↗	↘		↗

注:表中符号“↗”表示单调增加;“↘”表示单调减少。

所以，y 在 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 内单调减少，在 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ 内单调增加。

利用函数的单调性，可以证明不等式。

例 3.4.2　证明当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$。

证明　令 $f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$，则当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 严格单调增加，即 $f(x)>f(0)$。

因为 $f(0)=\ln1-0$，所以当 $x>0$ 时，

$$\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)>0$$

当 $x>0$ 时，

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$$

评注　利用函数的单调性证明不等式。当 $x>a$ 时，$\psi(x)>\varphi(x)$ 的方法如下：(1) 令 $f(x)=\psi(x)-\varphi(x)$；(2) 求导数并确定当 $x>a$ 时导数的符号，当 $x>a$ 时，$f'(x)=\psi'(x)-\varphi'(x)>0$；(3) 确定 $f(x)$ 的单调性，当 $x>a$ 时 $f(x)$ 严格单调增加，$f(x)>f(a)$；(4) 检查 $f(a)=0$，得当 $x>a$ 时 $f(x)>0$，即当 $x>a$ 时，$\psi(x)>\varphi(x)$。

类似可证明：当 $x>a$ 时，$\psi(x)<\varphi(x)$；当 $x<a$ 时，$\psi(x)>\varphi(x)$；当 $x<a$ 时，$\psi(x)<\varphi(x)$。

3.4.2　函数的极值

1. 极值的概念

定义 3.4.1　如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义，且对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极大值点；如果对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，总有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极小值点。

极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点。

显然，极值是一个局部性概念。函数在某点达到极大值或极小值，是指在局部范围内（即在该点的某个邻域内）该点的函数值为最大或最小，而不一定是函数在整个考察范围内的最大值或最小值，因此是一个定义在区间 $[a,b]$ 上的函数；它在 $[a,b]$ 上可以有许多极大值和极小值，但其中的极大值并不一定都是大于每一个极小值的，如图 3-4 的极大值 $f(x_5)$ 小于极小值 $f(x_2)$。在几何上，极大值对应于函数曲线的峰顶，极小值对应于函数曲线的谷底。

另外，由定义知，函数定义区间的端点一定不是极值点。因作为一个极值，要用极值点左右两侧的函数值与它比较。换句话说，函数如果有极值，则一定在区间的内部取到。

由图 3-4 看出，在极值点处，若曲线有非铅直切线，则切线一定是水平的，即切线的斜率为 0。因此，我们得到极值存在的必要条件。

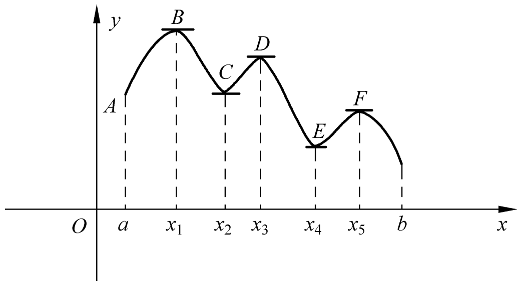


图 3-4

2. 极值存在的必要条件

定理 3.4.3 设点 x_0是函数 $f(x)$的极值点,且 $f(x)$在点 x_0处可导,则 $f'(x_0)=0$。

定义 3.4.2 若 $f'(x_0)=0$,则称 x_0为 $f(x)$的一个驻点。

由定理 3.4.3 知道,极值点必为驻点或不可导点,但反过来,驻点或不可导点却不一定是极值点。

例如:$x=0$ 是 $f(x)=x^2$的驻点,也是极小值点;$x=0$ 是 $f(x)=x^3$的驻点,但不是极值点。

又如:$x=0$ 是 $f(x)=|x|$的不可导点,也是极小值点;$x=0$ 是 $f(x)=\sqrt[3]{x}$的不可导点,但不是极值点。

例 3.4.3 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处取得极值,求 a,b 的值。

解 $\because f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore f'(1)=3+2a+b, f'(-1)=3-2a+b$

$\because x=1, x=-1$ 均为极值点

$$\therefore \begin{cases} f'(1)=3+2a+b=0 \\ f(-1)=3-2a+b=0 \end{cases}$$

解得 $a=0, b=-3$

由上面的讨论我们知道,集合(极值点)包含于集合(驻点或不可导点)内。要求函数的极值点,应先求出驻点和不可导点,再从中逐个加以判别是否为极值点。下面给出两个判别极值点的充分条件。

3. 极值存在的充分条件

定理 3.4.4 (极值存在的一阶充分条件)设函数 $f(x)$在点 x_0的某个邻域内连续且可导(但 $f'(x_0)$可以不存在)。

(1) 若当 $x<x_0$时,$f'(x)>0$,当 $x>x_0$时,$f'(x)<0$,则 x_0是极大值点;

(2) 若当 $x<x_0$时,$f'(x)<0$,当 $x>x_0$时,$f'(x)>0$,则 x_0是极小值点;

(3) 若在点 x_0的两侧,$f'(x)$同号,则 x_0不是极值点。

根据上面的必要条件和一阶充分条件,可以按以下步骤判别及求函数的极值:

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域;

(2) 求 $f'(x)$,找出定义域内 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$不存在的点,这些临界点将定义域分成若干区间;

(3) 列表,由 $f'(x)$在临界点两侧的符号,确定是否是极值点,是极大值点还是极小值点;

(4) 求出极值。

例 3.4.4　求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$ 的单调区间和极值。

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2-2x}{\sqrt[3]{2x-x^2}}=\frac{4(1-x)}{3\sqrt[3]{x(2-x)}}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x=1$，$f'(x)$ 不存在的点为 $x=0$，$x=2$。

列表讨论(见下表)：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f(x)$		极小值 0		极大值 1		极小值 0	

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(1,2)$ 内严格单调减少，在 $(0,1)\cup(2,+\infty)$ 内严格单调增加，极小值为 $f(0)=0$，$f(2)=0$，极大值为 $f(1)=1$。

定理 3.4.5　(极值存在的二阶充分条件)设 x_0 是函数 $f(x)$ 的驻点，$f(x)$ 在点 x_0 有二阶导数。

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点；

(3) 若 $f''(x_0)=0$，则 x_0 可能是极值点，也可能不是极值点。

例 3.4.5　用二阶导数求 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值。

解　令 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$，得驻点为 $x=1$，$x=2$。

$f''(x)=12x-18$，$f''(1)=-6<0$，$f''(2)=6>0$。

由二阶充分条件，$x=1$ 为极大值点，$x=2$ 为极小值点，极大值为 $f(1)=2$，极小值为 $f(2)=1$。

3.4.3　函数的最大值与最小值

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值。

由第 2 章闭区间上连续函数的性质，若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值与最小值。当然这最大或最小值，可能在区间的两个端点上取得，也可能在区间内部取到。如果最大(小)值在区间的内部取到，那么这个最大(小)值同时也是一个极大(小)值，并且它是所有极大(小)值中的最大(小)者。而极值只能在驻点或不可导点处取得。这样，我们得到求 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内的最大值与最小值的步骤如下：

(1) 求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的驻点和不可导点；

(2) 求出驻点、不可导点和端点的函数值；

(3) 比较上述函数值的大小，其中最大者即是最大值，最小者即是最小值。

例 3.4.6　求函数 $f(x)=\sqrt[3]{2x-x^2}$ 在 $[-1,4]$ 上的最大值与最小值。

解　$f'(x)=\dfrac{2-2x}{3\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}}$，不可导点为 $x=0$，$x=2$。

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$。

$f(-1)=-\sqrt[3]{3}$，$f(4)=-2$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$

所以，$f(x)$在$[-1,4]$上的最大值为 $f(1)=1$，最小值为 $f(4)=-2$。

2. 如果 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，那么 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值是 $f(b)$，最小值是 $f(a)$；如果 $f(x)$在$[a,b]$上单调减少，那么，$f(x)$在$[a,b]$上的最大值是 $f(a)$，最小值是 $f(b)$。

3. 如果 $f(x)$在开区间(a,b)内只有一个极大(小)值，而没有极小(大)值，那么极大值为最大(小)值。

例 3.4.7 将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒。问截掉的小正方形边长为多少时，所得方盒的容积最大？

解 设小正方形的边长为 x，则盒底正方形的边长为 $a-2x$，如图 3-5 所示。

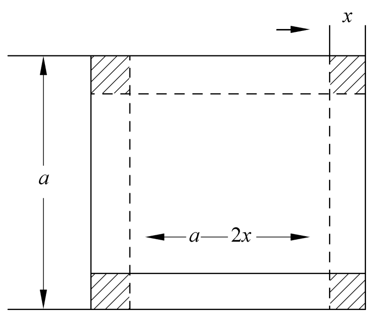


图 3-5

因此，方盒的容积为

$$V=x(a-2x)^2,\quad 0<x<\frac{a}{2}$$

令

$$V'=(a-2x)(a-6x)=0$$

得 $x_1=\dfrac{a}{6}$，$x_2=\dfrac{a}{2}\notin\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$舍去。

$$V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$$

所以 $x=\dfrac{a}{6}$为极大值点，由于极值点是唯一的，故 $x=\dfrac{a}{6}$是最大值点。

答：当截去的小正方形的边长为$\dfrac{a}{6}$时，做成的盒子的容积最大。

例 3.4.8 如图 3-6 所示，某工厂要建造一个容积为 $300\mathrm{m}^3$ 的带盖圆桶，问底半径 r 和桶高 h 如何确定，则所用材料最省？

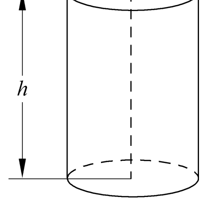


图 3-6

解　根据题意要使所用材料最省，就是使圆桶表面积最小。圆桶表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

由 $\pi r^2 h=300$，有 $h=\dfrac{300}{\pi r^2}$，所以

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{300}{\pi r^2}$$

$$S=2\pi r^2+\frac{600}{r},0<r<+\infty。$$

令 $S'=4\pi r-\dfrac{600}{r^2}=0$，得

$$r^3=\frac{150}{\pi}$$

驻点为 $r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$

$$S''=4\pi+\frac{1200}{r^3}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)=12\pi>0$$

所以，$r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ 极小值点，由于极值点是唯一的，故 $\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ 是最小值点，把 $r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ 代入 $h=\dfrac{300}{\pi r^2}$，得 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}=2r$。

答：当桶底半径为 $r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ m，桶高 $h=2r$m 时，所用的材料最省。

习题 3.4

1. 确定下列函数的单调区间。

(1) $y=x^3-3x^2-9x+4$　　(2) $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

(3) $y=(x-1)(x+1)^3$　　(4) $y=x-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

(5) $y=x-\ln(1+x)$　　(6) $y=x\sqrt{ax-x^2}\ (a>0)$

2. 证明：$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2},(x>0)$

3. 求函数 $y=x-\ln x^2$ 的极值。

4. 用二阶导数求下列函数的极值。

(1) $y=x^3-9x^2+15x+3$　　(2) $y=2x^2-x^4$

(3) $y=x^3-3x^2-9x-5$　　(4) $y=2e^x+e^{-x}$

5. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值。

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1,[-1,2]$

(2) $y=\dfrac{x^2}{1+x},\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

6. 有甲乙两个工厂,甲厂位于一直线形河流的岸边,乙厂离岸 40km,乙厂到河岸的垂足与甲厂相距 50km。两厂在河边合建一水源地,从水源地到甲厂和乙厂的水管及建设费用分别为每千米 500 元和 700 元。问水源地设在河边何处,才能使建设总费用最省?

7. 欲制作一个底为正方形、容积为 108m^3 的长方体开口容器,怎样做法所用材料最省?

8. 欲用围墙围成面积为 216m^2 的一块矩形土地,并在正中用一堵墙将其隔成两块,问这块土地的长和宽选取多大的尺寸,才能使所用建筑材料最省?

9. 欲制作一个底面为长方形的带盖箱子,其体积为 72cm^3,其底边成 1∶2 关系,问各边的长为多少时,才能使表面积最小?

10. 在 100km 长的铁路线 AB 之旁的 C 处有一个工厂,与铁路垂直距离为 20km,由铁路的 B 处向工厂提供原料。公路与铁路每吨千米的货物运价比为 5∶3,为节约运费在铁路的 D 处修建货物转运站。设 AD 距离为 $x$km。沿 CD 修一公路,如图 3-7 所示。问转运站 D 点距 A 为多少 km 时,可使货物由供应站 B 运到工厂 C 的总运费最低?

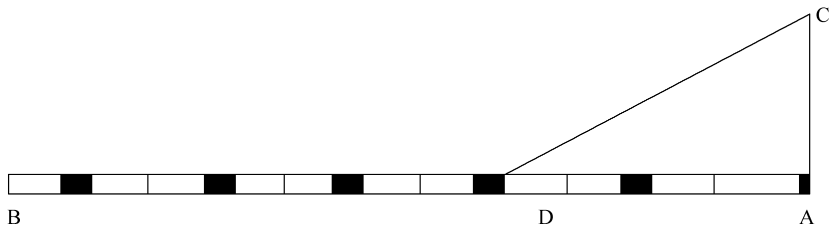


图 3-7

3.5 曲线的凸凹性、拐点、渐近线及函数作图

3.5.1 曲线的凸凹性、拐点

研究函数的性态,仅知道函数在区间(a,b)内严格增加(或严格减少)还不够。例如,函数 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$,在$(0,+\infty)$内都是严格增加的(见图 3-8),它们严格增加的方式却有显著的区别。曲线 $y=x^2$ 向下鼓,曲线 $y=\sqrt{x}$ 向上鼓。曲线向下(或向上)鼓的主要特征是什么呢?直观上不难看到,整个曲线必在其上任一点切线的上方(或下方)。这就是函数在区间下凸(或上凹)的几何意义。

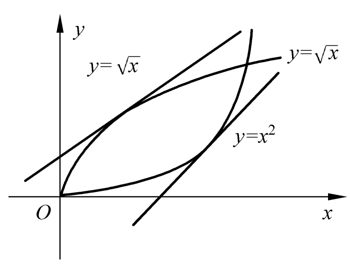


图 3-8

定义 3.5.1　如果在区间(a,b)内，曲线$y=f(x)$在其上任意一点的切线的上方，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内下凸(或上凹)；如果在区间(a,b)内，曲线$y=f(x)$在其上任一点切线的下方，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内上凸(或下凹)。

定义 3.5.2　若曲线$y=f(x)$在其上一点$M(x_0,f(x_0))$的一侧上凹，另一侧下凸，则称点$M(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点，如图 3-9 所示。

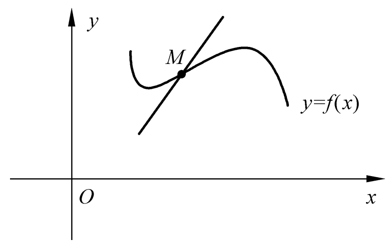


图　3-9

判断曲线的凸凹性和拐点，可用下面定理。

定理 3.5.1　(凸凹性的二阶判别准则)设函数$f(x)$在(a,b)内有二阶导数。

(1) 若当$x\in(a,b)$时，$f''(x)<0$，则$f(x)$在(a,b)内上凸(或下凹)；

(2) 若当$x\in(a,b)$时，$f''(x)>0$，则$f(x)$在(a,b)内下凸(或上凹)。

定理 3.5.2　(拐点判别定理)　设函数$f(x)$在x_0点的两侧有二阶导数，且在x_0点连续，

(1) 若在x_0点的两侧，$f''(x)$异号，则点$(x_0,f(x_0))$是$f(x)$的拐点；

(2) 若在x_0点的两侧，$f''(x)$同号，则点$(x_0,f(x_0))$不是$f(x)$的拐点。

由上面定理易知，若点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点，则$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在。且可按下面步骤判断$y=f(x)$的凸性及拐点：

(1) 求$f(x)$的定义域D_f；

(2) 在D_f内，求二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点；

(3) 用上面的点把D_f分成若干个小区间，确定二阶导数在每个小区间内的符号，再确定曲线的凸性与拐点。

例 3.5.1　讨论函数$f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$的凸性与拐点。

解　$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2,\quad f''(x)=x^3-3x^2+2x$$

令$f''(x)=0$，得$x=0,x=1,x=2$

列表(见下表)讨论：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点 0	$\cup$	拐点$\frac{2}{15}$	$\cap$	拐点$\frac{4}{15}$	$\cup$

则 $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(1,2)$内上凸,在$(0,1)\cup(2,+\infty)$内下凸,拐点为$(0,0)$,$\left(1,\frac{2}{15}\right)$,$\left(2,\frac{4}{15}\right)$。

例 3.5.2 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x}$的凸性与拐点。

解 $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,$y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

当 $x=0$ 时,y''不存在。

列表(见下表)讨论:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	+	不存在	−
y	$\cup$	0	$\cap$

则 $y=\sqrt[3]{x}$在$(-\infty,0)$内下凸,在$(0,+\infty)$内上凸,拐点为$(0,0)$。

3.5.2 曲线的渐近线

当函数的定义域和值域都是有限值时,其图形仅局限于一定范围内,如椭圆。而有些函数的定义域或值域是无限区间,此时函数的图形向无穷远处延伸,如抛物线;而且还有些向无穷远处延伸的曲线,当其上的点沿曲线趋于无穷远时,该曲线与某直线无限地靠近。如双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 在远离原点时无限地靠近,如图 3-10 所示,这样的直线叫作曲线的渐近线。

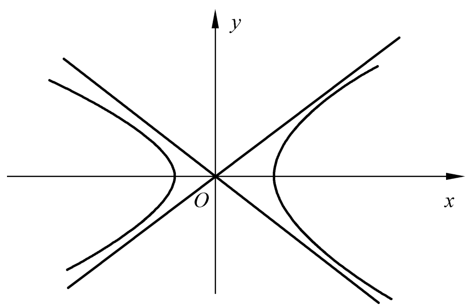


图 3-10

定义 3.5.3 如果曲线上的一点沿着曲线趋于无穷远时,该点与某条直线的距离趋于零,则称此直线为曲线的渐近线。

如果已知曲线方程 $y=f(x)$,如何确定该曲线是否有渐近线呢?如果有渐近线,怎样求出渐近线方程呢?下面分三种情况讨论。

1. 水平渐近线

如果曲线 $y=f(x)$的定义域为无限区间,且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=b$$

存在，则直线 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

例 3.5.3　求曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线。

解　$\because \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ 直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线。

例 3.5.4　求曲线 $y=\dfrac{e^{5-x}}{5-x}$ 的水平渐近线。

解　$\because \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{5-x}}{5-x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{5-x}}{-1}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5-x}}{5-x}\left(\frac{0}{\infty}\right)=0$$

$\therefore$ 直线 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{e^{5-x}}{5-x}$ 的水平渐近线。

2. 铅直渐近线

如果曲线在点 x_0 处间断，且有

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty \text{ 或} \lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$$

则直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线。

例 3.5.5　求曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ 的铅直渐近线。

解　由 x^2-3x+2，得间断点为 $x=1, x=2$，且

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\infty, \lim_{x\to2}\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\infty$$

所以，直线 $x=1, x=2$ 为曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ 的铅直渐近线。

3. 斜渐近线

若曲线 $y=f(x)$ 定义在无限区间，且

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 与 } b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$$

都存在，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线。

例 3.5.6　求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的斜渐近线。

解　$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{(x-1)^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=1$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-1\cdot x\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2\end{aligned}$$

所以 $y=x+2$ 是所求的斜渐近线。

3.5.3 函数作图

通过前文的介绍,我们可以利用导数确定函数的单调性、极值、凹凸性、拐点和渐近线,这样一般可以比较精确地作出函数的图形。利用导数作函数的图形可按下面步骤进行:

(1) 确定函数的定义域 D_f、周期性、奇偶性;

(2) 在 D_f 内求驻点、导数不存在的点、二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点;

(3) 用上面的点把 D_f 分成若干个小区间,列表讨论函数的单调性、极值、凹凸性和拐点;

(4) 确定曲线的渐近线;

(5) 适当地补充些点,并据上面结果,逐个区间作图。

例 3.5.7 作函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形。

解 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$y'=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$,$y''=\dfrac{2}{(1+x)^3}$,令 $y'=0$,得驻点为 $x=0$,$x=-2$,无二阶导数为零的点。列表(见下表)讨论:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	不存在	$+$		$+$
y	$\cap$	拐点 -4	$\cap$	间断	$\cup$	极小值 0	$\cup$

$\because \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{1+x}=\infty$,$\therefore x=-1$ 是铅直渐近线。

$\because a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{1+x}=-1$

$\therefore y=x-1$ 是斜渐进线,曲线过 $(-2,-4)$,$(0,0)$ 点。

作图如图 3-11 所示。

例 3.5.8 作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形。

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$\varphi(x)$ 为偶函数,其图形关于 y 轴对称。

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $\varphi'(x)=0$,得 $x=0$,令 $\varphi''(x)=0$,得 $x=-1$,$x=1$。

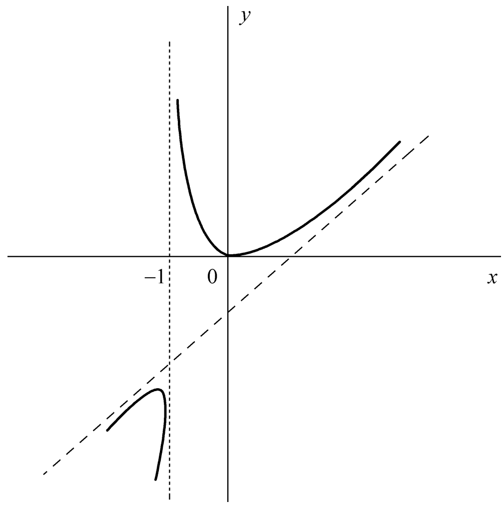


图　3-11

列表(见下表)讨论：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,-1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi(x)'$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi(x)''$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\cap$	拐点 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}$	$\cap$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\cup$	拐点 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}$	$\cup$

其中$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4$，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}\approx 0.24$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

水平渐近线 $y=0$。

先作出$(0,+\infty)$内图形，再由对称性作区间$(-\infty,0)$内的图形，如图 3-12 所示。

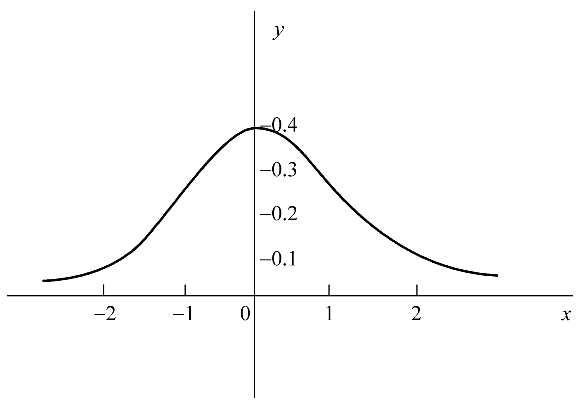


图　3-12

习题 3.5

1. 求下列曲线的凹凸区间与拐点。

(1) $y=x\mathrm{e}^{-x}$　　(2) $y=2x^3+3x^2-12x+14$

2. 求下列曲线的渐近线。

(1) $y=\mathrm{e}^x$　　(2) $y=\ln x$

(3) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$　　(4) $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$

3. 试求函数 $y=|x\mathrm{e}^{-x}|$ 的连续区间、可导区间、单调区间、极值点、曲线的凹凸性、拐点与渐近线,并作出草图。

4. 曲线 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$(　　)。

(A) 有水平渐近线　　(B) 有铅直渐近线

(C) 有斜渐近线　　(D) 没有渐近线

第 3 章习题参考答案

习题 3.1

1. 成立,$\xi=\dfrac{-4+\sqrt{37}}{3}$;2. $\xi=\dfrac{\pi}{2}$;3. 有两个实根,分别在区间$(1,2)$及$(2,3)$内;

4. $\xi\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$;5. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;6. 利用拉格朗日定理即可;7. 用罗尔中值定理。

8. 利用拉格朗日定理即可。

习题 3.2

1.(1) 2　(2) 1　(3) -4　(4) $\dfrac{1}{6}$　(5) $\dfrac{1}{2}$　(6) ∞　(7) $-\dfrac{1}{6}$　(8) $\dfrac{1}{a}$

2. (1) 3　(2) -1　(3) 0　(4) 0　(5) 1　(6) $\dfrac{3}{2}\pi$

3. (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 0　(3) 1　(4) $\dfrac{2}{3}$

5. (1) 1　(2) $\mathrm{e}-\dfrac{1}{6}$　(3) e^{-1}　(4) 1　(5) 1　(6) 1　(7) 1　(8) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　(9) 1

6. (B,C)

习题 3.3

1. $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$

2. $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

3. $x\mathrm{e}^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$,$0<\theta<1$

4. (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{1}{20}$　(3) $\dfrac{1}{6}$

习题 3.4

1. (1) 在 $(-\infty,-1]$, $[3,+\infty)$ 内单调增加, $[-1,3]$ 上单调减少;

(2) 在 $[-1,0]$ 内单调减少, 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,+\infty)$ 内单调增加;

(3) 在 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$ 上单调增加, 在 $[1,2]$ 上单调减少;

(4) 在 $(-\infty,0]$ 上单调增加, 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少。

(5) 在 $(-1,0]$ 上单调减少, 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, (6) 在 $\left[0,\frac{3}{4}a\right]$ 上单调增加, 在 $\left[\frac{3}{4}a,a\right]$ 上单调减少。

2. 提示: 令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$

3. 极小值 $y(2)=2-2\ln 2$; 极小值 $y(0)=0$, 拐点 $(-1,\ln 2)$, $(1,\ln 2)$

4. (1) 极大值 $y(1)=10$, 极小值 $y(5)=-22$

(2) 极大值 $y(\pm 1)=1$, 极小值 $y(0)=0$

(3) 极大值 $y(-1)=0$, 极小值 $y(3)=-32$

(4) 极小值 $y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}$

5. (1) 最大值 $y(1)=2$, 最小值 $y(-1)=10$

(2) 最小值 $y(0)=0$, 最大值 $y\left(-\frac{1}{2}\right)=y(1)=\frac{1}{2}$

6. 设在甲厂距乙厂到河岸的垂足 $\frac{100}{\sqrt{6}}$ km 处

7. 底边长 6m, 高为 3m

8. 长 18m, 宽 12m

9. 底边长 3cm, 6cm, 高 4cm

10. $|DA|=15$km

习题 3.5

1. (1) 拐点 $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$, 在 $(-\infty,2]$ 内是凸的, 在 $[2,+\infty)$ 内是凹的, (2) 拐点 $\left(-\frac{1}{2},20\ \frac{1}{2}\right)$, 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ 内是凸的, 在 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内是凹的。

2. (1) $y=0$　(2) $x-0$　(3) $x=-1$, $y=0$　(4) $x=0$, $y=x$

3. $y=0$ 为水平渐近线, 无其他渐近线, 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(1,0)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$	不存在	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		极小值 0 拐点 $(0,0)$		极大值 e^{-1}		拐点 $\left(0,\frac{2}{e^2}\right)$	

作图如图 3-13 所示。

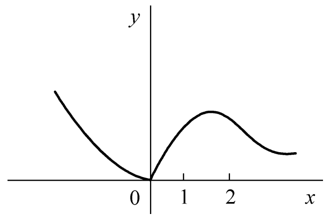


图 3-13

第4章　不定积分

在微积分学(微分学和积分学)中,积分与微分在一定意义下互为逆运算。在第2章中,我们讨论了如何求一个函数的导数问题,但是在实际问题中,常常会遇到相反的问题,即已知函数的导数求原来的函数。例如,在经济分析中,往往已知产品的边际成本$C_m(x)$,求产品的总成本函数$C(x)$;已知产品的边际收益$R_m(x)$,求产品的总收益函数$R(x)$,等等。这是积分学的基本问题之一。

本章介绍不定积分的概念、性质、求不定积分的基本方法及简单应用。

4.1　不定积分的概念与性质

4.1.1　原函数

微分学的基本问题是寻求一个已知函数的导数,这个问题具有重要意义,我们已经看到它的许多应用。但是在实际问题中,还广泛地存在与此相反的另一类问题,这一类问题并不是要寻求某一个函数的导数,而是反过来,要寻找一个函数,使得它的导数恰好等于某一个已知函数。

例如,如果某平面曲线的方程为$y=f(x)$,那么,对$y=f(x)$求导,就得到曲线在点$(x,f(x))$处的切线斜率为$k(x)=f'(x)$。

但在平面解析几何中,我们也常遇到相反的问题,即已知平面曲线在任一点的切线斜率为$k=k(x)$,而要求出曲线方程$y=f(x)$。从数学来看,这个问题就是要找一个函数$y=f(x)$,使得其导数$f'(x)$恰好等于已知函数$k(x)$。这正是微分学的逆问题,即已经知道了函数的导数,而要找出原来的函数。这是本节讨论的中心问题。

定义4.1.1　设$f(x)$是定义在某区间上的已知函数,如果存在函数$F(x)$,使得在该区间上的任意一点,都有

$$F'(x)=f(x)$$

则称$F(x)$为函数$f(x)$在该区间上的一个原函数。

例如,因为$(x^2)'=2x$,$(\sin x)'=\cos x$,$(\tan x)'=\sec^2 x$,所以,x^2是$2x$的一个原函数,$\sin x$是$\cos x$的一个原函数,$\tan x$是$\sec^2 x$的一个原函数。

由原函数的定义,易知如下性质。

性质1　若$F(x)$是$f(x)$在某个区间上的一个原函数,C为任意常数,则$F(x)+C$也是$f(x)$在该区间上的原函数。

性质1告诉我们,如果一个函数有原函数,则必有无穷多个。

由拉格朗日中值定理的推论2,易知如下性质。

性质2　若$F(x)$,$G(x)$都是$f(x)$在某个区间上的原函数,则存在常数C,使得$G(x)=F(x)+C$。

性质 3 设 $F(x)$是函数 $f(x)$在某个区间上的一个原函数,则 $f(x)$在该区间上的全部原函数为 $F(x)+C$,C 为任意常数。

证明:设 $G(x)$是 $f(x)$在该区间上的任意一个原函数,由性质 2 可知,存在常数 C,使得$G(x)=F(x)+C$,即 $f(x)$的任意一个原函数都包括在函数族 $F(x)+C$ 之中。

另外,由性质 1 可知,$F(x)+C$ 是 $f(x)$在该区间上的原函数。

综上,$f(x)$在该区间上的全部原函数为函数族 $F(x)+C$(C 为任意常数)。

性质 3 的重要意义在于:如果要想找 $f(x)$的所有原函数,只随便找出其中某一个就行了,在所找出的原函数上加上一个任意常数,则得到所有原函数。

定理 4.1.1 若函数 $f(x)$在某区间上连续,则 $f(x)$在该区间上一定存在原函数。

4.1.2 不定积分的概念

1. 不定积分的定义

定义 4.1.2 函数 $f(x)$在区间 I 内原函数的全体称为 $f(x)$在 I 内的不定积分,记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 内的一个原函数,那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

其中,$\int$ 称为不定积分号,$f(x)$称为被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式,x 称为积分变量,C 称为积分常数。

由此可知,求已知函数的不定积分,就归结为求它的一个原函数问题。

例 4.1.1 求 $\int 5x^4\mathrm{d}x$。

解 由于 $(x^5)'=5x^4$,所以 x^5 是 $5x^4$ 的一个原函数,因此 $\int 5x^4\mathrm{d}x = x^5+C$。

例 4.1.2 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解 由于 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,所以 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$。

例 4.1.3 求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解 由于 $\ln|x|=\begin{cases}\ln(-x) & x<0\\ \ln x & x>0\end{cases}$

当 $x>0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

当 $x<0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

即 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内的一个原函数，于是

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

评注　以上三例皆用不定积分的定义。

2. 不定积分的几何意义

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $y=F(x)$ 的图形是平面直角坐标系中一条曲线，称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，而 $y=F(x)+C$ 的图形则是上述积分曲线沿着 y 轴方向任意平行移动得到 $f(x)$ 的无穷多条积分曲线，称为 $f(x)$ 的积分曲线族。不定积分的几何意义就是一个积分曲线簇，它的特点是：各积分曲线在横坐标相同的点 x_0 处的切线斜率相等且均为 $f(x_0)$，即各切线相互平行，如图 4-1 所示。

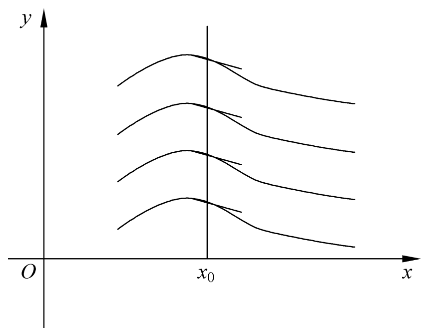


图　4-1

有时要从全体原函数中，确定一个满足条件 $y(x_0)=y_0$（称为初始条件）的原函数，也即通过点 (x_0,y_0) 的积分曲线，此条件可唯一确定积分常数 C 的值，即这个原函数是唯一的。

例 4.1.4　求经过 $(1,2)$，且其 x 点处切线斜率为 $3x^2$ 的曲线方程。

解　由题设 $y'=3x^2$，所以有

$$y = \int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C$$

将 $x=1,y=2$ 代入上式，得 $y(1)=1^3+C=2$，解得 $C=1$。
故所求曲线方程为 $y=x^3+1$。

评注　若曲线的斜率为 $k(x)$，则曲线方程为 $y=\int k(x)\mathrm{d}x$。

4.1.3　不定积分的基本性质

由不定积分的定义，得不定积分具有以下基本性质：

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k\neq 0$ 常数），

即被积函数不为零的常数因子可移到积分号的外面。

(2) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$，

上式可推广到有限个函数代数和的积分情形。

$$\int[f_1(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x$$

(3) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$。

(4) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$，$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$。

性质(3)、(4)说明了不定积分与导数(或微分)互为逆运算。

例 4.1.5 求 $\int \mathrm{d}(x^5+\cos x)$。

解 $\int \mathrm{d}(x^5+\cos x)=x^5+\cos x+C$

评注 使用上述不定积分的基本性质 4。

例 4.1.6 已知 $F(x)$是 e^{-x}的一个原函数，求 $\mathrm{d}F(\sqrt{x})$。

解 由题设 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，故

$$\mathrm{d}F(\sqrt{x})=F'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

4.1.4 基本积分公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，所以从导数公式可得如下相应的积分公式。

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$(k 是常数)

(2) $\int x^a\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C(a\neq-1)$

$\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(3) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq1)$

$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

(4) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

$\int \sec x\tan x=\sec x+C$

$\int \mathrm{cscxcot}x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

$\int \sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C$

$\int \csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(5) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C$；

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

要验证这些公式，只需验证等式右端的导数等于左端不定积分的被积函数，这种方法也是我们验证不定积分的计算是否正确的常用方法。

利用基本积分公式和不定积分的性质，通过对被积函数作适当代数或三角恒等变形，可求简单函数的不定积分。

例 4.1.7　求下列不定积分。

(1) $\int \sqrt{x}(x^3+5)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{(x+3)^2}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int 2^x(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解　(1)
$$\int \sqrt{x}(x^3+5)\mathrm{d}x = \int (x^{\frac{7}{2}}+5x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}x + 5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(2)
$$\int \frac{(x+3)^2}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+6x+9}{x}\mathrm{d}x = \int \left(x+6+\frac{9}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + 6\int \mathrm{d}x + 9\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2+6x+9\ln|x|+C$$

(3)
$$\int 2^x(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x = \int (2^x\mathrm{e}^x+2^x)\mathrm{d}x = \int (2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x + \int 2^x\mathrm{d}x = \frac{(2\mathrm{e})^x}{1+\ln 2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

(4)
$$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C$$

例 4.1.8　求下列不定积分。

(1) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{1}{5\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{1}{2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解 (1) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

(2) $\int \frac{1}{5\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= 5\int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 20\int \csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$= -20\cot x + C$$

(3) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \tan x - x + C$$

(4) $\int \frac{1}{2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\tan x - \frac{1}{2}\cot x + C$$

评注 以上三例为直接积分法：查积分公式；用线性性质；把被积函数恒等变形。

例 4.1.9 设生产 x 个单位产品时的边际成本 $C'(x)=2x+10$，其中固定成本为 20，求总成本函数 $C(x)$。

解 $C(x) = \int C'(x)\mathrm{d}x = \int (2x+10)\mathrm{d}x$

$$= x^2 + 10x + C$$

固定成本即产量为 0 的成本：$x=0$ 时的成本 $C(0)=20$，代入上式得

$$C = 20$$

所以

$$C(x) = x^2 + 10x + 20$$

评注 设边际成本为 $C'(x)$，则总成本为 $C(x) = \int C'(x)\mathrm{d}x$。

习题 4.1

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2} + C$，则 $f(x) =$ ________。

2. $\mathrm{d}\int \arctan x\mathrm{d}x =$ ________。

3. $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$的一个原函数是________。

4. 若$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,则$\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=$ ________。

5. (　　)是函数 $e^{2x}-e^{-2x}$的原函数。

(A) $2(e^{2x}-e^{-2x})$　　(B) $\dfrac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$

(C) $\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})^2$　　(D) $\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})^2$

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(ax+b)\mathrm{d}x=$(　　)$(a\neq 0)$。

(A) $f(ax+b)$　　(B) $af(ax+b)$

(C) $\dfrac{1}{a}f(ax+b)$　　(D) $f'(ax+b)(ax+b)'$

7. $\int \sin 2x\mathrm{d}x=$(　　)。

(A) $\sin^2 x+C$　　(B) $-\cos^2 x+C$

(C) $\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$　　(D) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

8. $\int\left(\dfrac{1}{\tan x}-1\right)\mathrm{d}\tan x=$(　　)。

(A) $\ln|\tan x|$　　(B) $\ln|\tan x|-x+C$

(C) $\ln|\tan x|-\tan x+C$　　(D) $\dfrac{1}{\tan^2 x}-x+C$

9. 设 $f(x)$的一个原函数是 e^{-x},则 $f'(x)=$(　　)。

(A) e^{-x}　　(B) $-e^{-x}$

(C) e^{-2x}　　(D) e^{2x}

10. 设 $f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\ln x}{x}$,则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$(　　)。

(A) $\dfrac{\ln x}{x}$　　(B) $\dfrac{1+\ln x}{x^2}+C$

(C) $\dfrac{\ln x}{x}$　　(D) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C$

11. 设$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$,则 $f(1-x^2)=$(　　)。

(A) $(1-x^2)^2$　　(B) $2x$

(C) $2(1+x^2)$　　(D) $2(1-x^2)$

12. 设 $f(x)=3x^4$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)$的全体原函数是(　　)。

(A) $\dfrac{1}{10}x^6+C_1x+C_2$　　(B) $\dfrac{3}{5}x^5+C$

(C) $\dfrac{1}{4}x^4-x+C$　　(D) $\dfrac{1}{4}x^3+C_1x+C_2$

13. 设 $f(x)=k\tan 2x$ 的一个原函数为 $\frac{2}{3}\ln\cos 2x$,则 $k=$(　　)。

(A) $-\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{3}{2}$

(C) $-\frac{4}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

14. 下列等式正确的有(　　)。

(A) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　(B) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

(C) $\int \mathrm{d}f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

15. 求下列不定积分。

(1) $\int(1-2x^2)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int(2^x+x^2)\mathrm{d}x$;

(3) $\int x\sqrt[3]{x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$;

(5) $\int\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^4}\right)\mathrm{d}x$;　　(6) $\int\frac{\sqrt{x}-x^3\mathrm{e}^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\mathrm{e}^x\left(3^x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;　　(8) $\int\frac{2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{x^3-x}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(11) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(13) $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$;　　(14) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$;

(15) $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int\cot^2x\mathrm{d}x$;

(17) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$;　　(18) $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$;

(19) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

16. 求一曲线 $y=f(x)$,使它在点 x 处的切线斜率为 $x+2$,且过点(1,0)。

17. 某产品的边际成本为 $C'(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2000}$,边际收入 $R'(x)=100-2x$。求总成本函数 $C(x)$和总收入函数 $R(x)$,已知固定成本为 10 元。

18. 设某商品的需求量 Q 是价格 P 的函数 $Q=f(P)$,已知边际需求为 $Q'=f'(P)=5000\mathrm{e}-\frac{1}{2}P$,且最大需求为 10000(当 $P=0$ 时,$Q=10000$),求需求函数。

19. 设某产品的总产量的变化率为 $f(t)=5t+3$,其中 t 为时间,求总产量函数 $P(t)$。

20. 设某一商品,每周生产 x 单位时总费用的变化率为 $f(x)=0.6x-10$(元/单位),固定费用为 0,这种商品的价格为 20 元/单位。问每周生产多少单位产品时,利润最大?

最大利益为多少?

21. 设生产 x 件产品的边际收益为 $R_M(x)=8-x$，其固定成本为 120 元，每多生产一单位新产品，成本增加 5 元，问产量为多少时，利润最大?

4.2　不定积分的换元积分法

对一些简单的不定积分，可以直接查积分公式，或用性质 2 和性质 3，或把被积函数恒等变形后再用积分性质和积分公式求积分，这种方法称为直接积分法。这种方法所能解决的问题是有限的，例如不定积分

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x,\quad \int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

就不能用直接积分法求出。下面，我们介绍求不定积分的三种基本积分方法：换元积分法、换元积分法和分部积分法。

4.2.1　换元法(凑微分法)

定理 4.2.1　设 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$，$u=\varphi(x)$ 可微，且

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$$

则有

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x\ (\text{变形})\\ &= \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\ (\text{凑微分})\\ &\xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u\ (\text{换元})\\ &= F(u)+C(\text{积分})\\ &= F(\varphi(x))+C(\text{还原})\end{aligned}$$

以上方法我们称为换元法，也称凑微分法。

在利用凑微分法求不定积分时，以下的凑微分情形经常出现：

(1) $\int (ax+b)\mathrm{d}x == \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$

(2) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

(3) $\int (x^a)x^{a-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int (x^a)\mathrm{d}x^a\ (a\neq 0)$

(4) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$

(6) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$

(7) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$

(8) $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cot x$

(9) $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$

$\int f(\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int f(\arccos x)\mathrm{d}\arccos x$

(10) $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$

$\int f(\operatorname{arccot} x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\operatorname{arccot} x)\mathrm{d}\operatorname{arccot} x$

(11) $\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

(12) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\frac{1}{x}$

例 4.2.1 求下列不定积分。

(1) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$；

(2) $\int 3^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x$；

(4) $\int\frac{1}{\sec x\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}\mathrm{d}x$

解 (1) 原式 $=\int(\sin x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(\sin x)^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$$

(2) 原式 $=\int 3^{\sin x}\mathrm{d}\sin x$

$$=\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C$$

(3) 原式 $=\int\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)^2\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int(\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x-\int 2\sin^4 x\mathrm{d}\sin x+\int\sin^6 x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

(4) 原式 $=\int(\sin x)^{-\frac{2}{3}}\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int(\sin x)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}(\sin x)^{-\frac{2}{3}+1}+C$$

$$=3(\sin x)^{\frac{1}{3}}+C$$

评注 由 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$，有类型：$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$。

例 4.2.2　求下列不定积分。

(1) $\int \frac{8\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　(2) $\int \sin^3 x dx$

解　(1) 原式 $=-8\int \frac{1}{1+\cos^2 x}(-\sin x)dx$

$$=-8\int \frac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x$$

$$=-8\arctan\cos x + C$$

(2) 原式 $=\int \sin^2 x \cdot \sin x dx$

$$=-\int (1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

评注　由 $\sin x dx = -d\cos x$，有类型：$\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x$。

例 4.2.3　求下列不定积分。

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$；　　(2) $\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx$

解　(1) 原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x}dx$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d\ln x$$

$$=\arcsin\ln x + C$$

(2) 原式 $=\int \ln^{-3} x d\ln x$

$$=-\frac{1}{2\ln^2 x} + C$$

评注　由 $\frac{1}{x}dx = d\ln x$，有类型：$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d\ln x$。

例 4.2.4　求下列不定积分。

(1) $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$；　　(2) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

解　(1) 原式 $=-\int \sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=-\int \sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x}$$

$$=\cos\frac{1}{x} + C$$

(2) 原式 $=-\int 3^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=-\int 3^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\frac{1}{x}}+C$$

评注 由$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\,\frac{1}{x}$,有类型:$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,\frac{1}{x}$。

例 4.2.5 求下列不定积分。

(1) $\int(3x+2)^{12}\mathrm{d}x$; (2) $\int(3-4x)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$

解 (1) 原式$=\frac{1}{3}\int(3x+2)^{12}\cdot 3\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int(3x+2)^{12}\mathrm{d}(3x+2)$$

$$=\frac{1}{39}(3x+2)^{13}+C$$

(2) 原式$=-\frac{1}{4}\int(3-4x)^{\frac{5}{2}}\cdot(-4x)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}\int(3-4x)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}(3-4x)$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{5}{2}+1}(3-4x)^{\frac{5}{2}+1}+C$$

$$=-\frac{1}{14}(3-4x)^{\frac{7}{2}}+C$$

评注 由 $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$,有类型:$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$,$(a\neq 0)$。

从上述例子我们可以看到,用换元法(凑微分法)解题的关键是将被积表达式表示成$f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$,进而凑成$f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$,其中需要一定的技巧,只有通过较多的练习才能熟练掌握。

4.2.2 换元法(变量代换法)

定理 4.2.2 设 $x=\varphi(t)$单调可微,且 $\varphi'(t)\neq 0$,若

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$$

则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x\overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=F(t)+C$$

$$=F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

1. 根式代换

例 4.2.6 求下列不定积分。

(1) $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$

解 (1) 令 $\sqrt{x-1}=t$,则 $x=t^2+1$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{t^2+1+1}{(t^2+1)t}\cdot 2t\mathrm{d}t = \int 2\left(1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\int \mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= 2t + 2\arctan t \\
&= 2\sqrt{x-1} + 2\arctan\sqrt{x-1}
\end{aligned}$$

（2）令 $\sqrt[6]{x-1}=t$，则 $x=t^6+1$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{(t^6)^{\frac{1}{3}}+(t^6)^{\frac{1}{2}}}6t^5\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+t^3}6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}\mathrm{d}t = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right)+C \\
&= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C
\end{aligned}$$

评注　如果被积函数中含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，即根号内的 x 是一次的，此时，可作根式代换 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，具体方法如下：

对积分 $\int f(\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，

对积分 $\int f\left(\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，

对积分 $\int f\left(\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，$p$ 为 m 与 n 的最小公倍数。

2. 三角代换

如果被积函数中含有如下 x 的二次根式，那么利用三角恒等关系式代换：

若被积函数中含有因式 $\sqrt{a^2-x^2}$，则令 $x=a\sin t\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

若被积函数中含有因式 $\sqrt{a^2+x^2}$，则令 $x=a\tan t\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

若被积函数中含有因式 $\sqrt{x^2-a^2}$，则令 $x=a\sec t\left(0<|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例 4.2.7　求下列不定积分。

（1）$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$　　　　（2）$\int \dfrac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

（3）$\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$　　　　（4）$\int \dfrac{x}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

解　（1）令 $x=\sin t\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$$

$$\text{原式} = \int \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

(2) 令 $x=3\tan t$,则

$$\mathrm{d}x = 3\sec^2 t\mathrm{d}t,\ (9+x^2)^{\frac{3}{2}} = (9+9\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 9\ (1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}} = 27\sec^3 t$$

$$\int \frac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{27\sec^3 t}\cdot 3\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{9}\sin t + C$$

$$= \frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + C$$

(3) 令 $x=2\sec t$,则

$$\mathrm{d}x = 2\sec t\tan t\mathrm{d}t,\ \sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t-4} = 2\tan t$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\tan t}{2\sec t}\cdot 2\sec t\tan t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \tan^2 t\mathrm{d}t = 2\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \sec^2 t\mathrm{d}t - 2\int \mathrm{d}t = 2\tan t - 2t + C$$

$$= \sqrt{x^2-4} - 2\arccos\frac{2}{x} + C$$

(4) 由于 $\sqrt{1+2x-x^2}=\sqrt{2-(x-1)^2}$,令 $x-1=\sqrt{2}\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\sqrt{1+2x-x^2} = \sqrt{2}\cos, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$\text{原式} = \int \frac{\sqrt{2}\sin t+1}{\sqrt{2}\cos t}\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \int(\sqrt{2}\sin t+1)\mathrm{d}t$$

$$= -\sqrt{2}\cos t + t + C$$

$$= -\sqrt{1+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

例 4.2.8 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$。

解　令$\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx=\int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-9}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$=-\int \frac{t}{\sqrt{1-9t^2}}dt=\frac{1}{18}\int (1-9t^2)^{-\frac{1}{2}}(-18t\,dt)$$

$$=\frac{1}{18}\int (1-9t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-9t^2)=\frac{1}{9}\sqrt{1-9t^2}+C$$

$$=\frac{1}{9x}\sqrt{x^2-9}+C$$

评注　对积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}dx$，$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2\pm x^2}}dx$，$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx$，$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$，$\int \frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x^4}dx$，$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$，可令 $x=\frac{1}{t}$，这种方法称为"倒数带换法"。

有几个重要的积分公式，可以补充到基本积分公式中：

(1) $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C$；

(2) $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$；

(3) $\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

(4) $\int \csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

(5) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(6) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$；

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$。

习题 4.2

1. 求下列不定积分。

(1) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$；　　(2) $\int 3^{\sin x}\cos x dx$；

(3) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$；　　(4) $\int \frac{1}{\sec x\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$；

(5) $\int \frac{8\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　(6) $\int \sin^3 x dx$；

(7) $\int \frac{e^{\cos x}}{\csc x}dx$；

(8) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$；

(9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$；

(10) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$；

(11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+3\ln x}}$；

(12) $\int \frac{\sin x\ln^2(\cos x+1)}{\cos x+1}dx$；

(13) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$；

(14) $\int \frac{\ln x}{x}dx$；

(15) $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$；

(16) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$；

(17) $\int \frac{dx}{x^2\cot\frac{1}{x}}$；

(18) $\int \frac{\sec\frac{1}{x}}{x^2}dx$；

(19) $\int xe^{-x^2}dx$；

(20) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}dx$；

(21) $\int \frac{x^3}{e^{3x^4}}dx$；

(22) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$；

(23) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(24) $\int \frac{x+3}{1+x^2}dx$；

(25) $\int (3x+2)^{12}dx$；

(26) $\int (3-4x)^{\frac{5}{2}}dx$；

(27) $\int e^{-2x}dx$；

(28) $\int \frac{1}{(2x-1)^3}dx$；

(29) $\int \sec\left(\frac{2}{3}x+5\right)dx$；

(30) $\int f'(ax+b)dx\,(a\neq 0)$

(31) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$；

(32) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$；

(33) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$；

(34) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+12x-9x^2}}$；

(35) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$；

(36) $\int \frac{1}{16x^2+8x-7}dx$；

(37) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+16x^2}}$；

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-16}}$；

(39) $\int e^x\cos e^x dx$；

(40) $\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}dx$；

(41) $\int e^{e^x+x}dx$；

(42) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$；

(43) $\int \frac{dx}{e^x+1}$；

(44) $\int e^x\sqrt{4+3e^x}dx$；

(45) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$；

(46) $\int 3^x\sin 3^x dx$；

(47) $\int 2^x \cos(2^x+1)\,\mathrm{d}x$；　(48) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-9x}}\mathrm{d}x$；

(49) $\int \frac{2^x}{9+4^x}\mathrm{d}x$；　(50) $\int \sqrt[3]{\tan x}\ \sec^2 x\,\mathrm{d}x$；

(51) $\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　(52) $\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$；

(53) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^6 x}$；　(54) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$；

(55) $\int 3^{\cot x}\ \csc^2 x\,\mathrm{d}x$；　(56) $\int \cot^4 x\,\mathrm{d}x$；

(57) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$；　(58) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(59) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arccos x)^3\ \sqrt{1-x^2}}$；　(60) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[3]{(\arctan x)^2}}$；

(61) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(62) $\int \frac{x\sin\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{3x^2+2}}\mathrm{d}x$；

(63) $\int \frac{x\cos\sqrt{4-3x^2}}{\sqrt{4-3x^2}}\mathrm{d}x$；　(64) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\mathrm{d}x$；

(65) $\int \frac{x^2-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；　(66) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{9-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

(67) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8}\mathrm{d}x$；　(68) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+7}\mathrm{d}x$；

(69) $\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；　(70) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$；

(71) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$；　(72) $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$；

(73) $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$；　(74) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

2. 计算下列不定积分。

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{x+1}{x\ \sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}}$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-3}+1}$；　(6) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int x^2\ \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(9) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ \sqrt{1+x^2}}$；

(11) $\int (9+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$；　(12) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$；　　(14) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$；

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；　　(16) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$；

(17) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；　　(18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4.3 不定积分的分部积分法

定理 4.3.1 设函数 $u=u(x)$与 $v=v(x)$都连续可微，则有分部积分公式：

$$\int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

即

$$\int u dv = uv - \int v du$$

用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法，其基本步骤为：

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &\xlongequal{公式(5)} \int u(x)\cdot v'(x)dx \\ &\xlongequal{公式(5)} \int u(x)dv(x) \\ &\xlongequal{公式(5)} u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \\ &\xlongequal{公式(5)} u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \text{ 的原函数}\end{aligned}$$

分部积分法的前提是要求对调后的积分 $\int v(x)du(x)$ 比对调前的积分$\int u(x)dv(x)$容易求出。这样，通过分部积分公式，可以利用对调后的积分求出原积分。当被积函数为两类不同函数乘积(幂函数和正弦函数或余弦函数乘积，幂函数和指数函数乘积，幂函数和对数函数乘积，幂函数和反三角函数乘积，指数函数和正弦函数或余弦函数乘积)时用分部积分法，而分部积分的关键是选择 u，v。

形如 $\int x^a e^{bx}dx$，$\int x^a \sin bx dx$，$\int x^a \cos bx dx$，选 $u=x^a$；形如 $\int x^a \ln^m x dx$，$\int x^a \arcsin bx dx$，$\int x^a \mathrm{sarccos} bx dx$，$\int x^a \arctan bx dx$，$\int x^a \mathrm{arccot} bx dx$，选 $v'=x^a$。简叙成按反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数的顺序排在前面的选作 $u(x)$。

用分部积分公式时，一般先用凑微分法，把积分改写成 $\int u dv$ 的形式。

例 4.3.1 求下列不定积分。

(1) $\int xe^x dx$　　(2) $\int x^2 e^{2x}dx$

解 (1) $\int xe^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + C$$

(2) $\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int x^2 \, de^{2x} = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{2x} - \int e^{2x} dx^2\right]$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int x \, de^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\left(x e^{2x} - \int e^{2x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}\int e^{2x} d2x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

评注　由 $e^x dx = de^x$，$e^{ax} dx = \frac{1}{a} de^{ax}$ 可用 n 次分部积分法，求出下列类型的积分：

$\int x^n e^x dx$，$\int x^n e^{ax} dx$，$\int P_n(x) e^x dx$，$\int P_n(x) e^{ax} dx$，其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，$a \neq 0$。

例 4.3.2　求下列不定积分。

(1) $\int x\sin x dx$　　(2) $\int x^2 \cos 2x dx$　　(3) $\int (3x-4)\cos ex dx$

解　(1) $\int x\sin x dx = -\int x d\cos x = -x\cos x + \int \cos x dx$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

(2) $\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int x^2 d\sin 2x = \frac{1}{2}\left(x^2 \sin 2x - \int \sin 2x dx^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \sin 2x - 2\int x\sin 2x dx\right) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}\int x d\cos 2x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \int \cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(3) $\int (3x-4)\cos ex dx = \frac{1}{e}\int (3x-4) d\sin ex$

$$= \frac{1}{e}\left[(3x-4)\sin ex - \int \sin ex d(3x-4)\right]$$

$$= \frac{1}{e}\left[(3x-4)\sin ex - 3\int \sin ex dx\right]$$

$$= \frac{1}{e}\left[(3x-4)\sin ex - \frac{3}{e}\int \sin ex dex\right]$$

$$= \frac{1}{e}(3x-4)\sin ex - \frac{3}{e^2}\int \sin ex dex$$

$$= \frac{1}{e}(3x-4)\sin ex - \frac{3}{e^2}\cos ex + C$$

评注　由 $\sin x dx = -d\cos x$，$\cos x dx = d\sin x$，$\sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}d\cos(ax+b)$，$\cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}d\sin(ax+b)$ 可用 n 次分部积分法，求出下列类型的积分：

$\int x^n \sin x\mathrm{d}x$，$\int x^n \cos x\mathrm{d}x$，$\int x^n \sin(ax+b)\mathrm{d}x$，$\int x^n \cos(ax+b)\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\sin x\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\cos x\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\sin(ax+b)\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\cos(ax+b)\mathrm{d}x$，其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，$a\neq 0$。

例 4.3.3 求下列不定积分。

(1) $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x$　　(2) $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$

解 (1)
$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \ln x\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}\left(x^3\ln x - \int x^3\mathrm{d}\ln x\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(2)
$$\int x\arcsin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arcsin x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2\arcsin x - \int x^2\mathrm{d}\arcsin x\right)$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}\int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + C$$

评注 由 $x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}x^{\alpha+1}$ $(\alpha\neq -1)$ 可用分部积分法求出下列类型的积分：

$\int x^\alpha\ln x\mathrm{d}x$，$\int x^\alpha\ln\varphi(x)\mathrm{d}x$，$\int x^\alpha\arcsin x\mathrm{d}x$，$\int x^\alpha\arccos x\mathrm{d}x$，$\int x^\alpha\arctan x\mathrm{d}x$，$\int x^\alpha\mathrm{arccot}\, x\mathrm{d}x$。

例 4.3.4 求下列不定积分。

(1) $\int\arcsin x\mathrm{d}x$　　(2) $\int(\ln x)^2\mathrm{d}x$

解 (1)
$$\int\arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x\mathrm{d}\arcsin x$$
$$= x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(2)
$$\int(\ln x)^2\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - \int x\mathrm{d}(\ln x)^2$$
$$= x(\ln x)^2 - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2\int\ln x\mathrm{d}x$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int x\,\mathrm{d}\ln x\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

评注　对任一个函数的不定积分都可直接用分部积分公式，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int xf'(x)\mathrm{d}x$$

例 4.3.5　求不定积分 $\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$。

解　$\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\sin x$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

所以

$$2\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x + 2C_1$$
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x + C$$

评注　用分部积分法时，若出现循环，可以用所求的积分为未知数解方程的方法，求出所求的积分。

评注　在使用分部积分公式时，适当选取 u 和 v' 是关键，一般可按反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数的顺序，把排序靠前的函数选为 u，排序靠后的函数选为 v'，在计算过程中，有可能使用多次的分部积分公式。

例 4.3.6　求不定积分 $\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

解　令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，有

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2t\cos t\mathrm{d}t$$
$$= 2t\sin t + 2\cos t + C$$
$$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

评注　例 4.3.6 中先用根换，后用分部积分法，为换元法与分部积分法的综合题，为常见试题。

习题 4.3

1. 求下列不定积分。

(1) $\int (2x^2+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　(2) $\int x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

(3) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int x\sin x\mathrm{d}x$

(5) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$　　(6) $\int x^2\sin 3x\mathrm{d}x$

(7) $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$ (8) $\int \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ (10) $\int x \ln(x^2+1) \mathrm{d}x$

(11) $\int x \arcsin x \mathrm{d}x$ (12) $\int x^3 \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x$

(13) $\int \ln x \mathrm{d}x$ (14) $\int \arcsin x \mathrm{d}x$

(15) $\int \arctan x \mathrm{d}x$ (16) $\int \ln(x^2+1) \mathrm{d}x$

(17) $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ (18) $\int x^3 \mathrm{d}x$

(19) $\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$ (20) $\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$

(21) $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$ (22) $\int \cos \ln x \mathrm{d}x$

(23) $\int x \sec^2 x \mathrm{d}x$ (24) $\int x \csc^2 x \mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分。

(1) $\int \sin \mathrm{d}x$ (2) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}} \mathrm{d}x$

(3) $\int \arctan \mathrm{d}x$ (4) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} \mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ (6) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \mathrm{d}x$ (8) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ (10) $\int \frac{x + \operatorname{arctg} \sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}} \mathrm{d}x$

3. 下列等式成立的有(　　)。

(A) $\int x f''(x) \mathrm{d}x = x f'(x) - f(x) + C$

(B) $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)} \mathrm{d}x = \ln|1+f(x)| + C$

(C) $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \mathrm{d}x = \arctan f(x) + C$

(D) $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln|1+f^2(x)| + C$

4.4 有理函数的积分

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法和分部积分法，下面简要讨论有理函数的积分及几种特殊的可化为有理函数的积分类型。

4.4.1　有理函数的不定积分

1. 有理函数的概念

定义 4.4.1　设有两个多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 与 $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$。其中，$m$ 和 n 是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 都是实常数，且 $a_0\neq0,b_0\neq0$，则这两个多项式的商所表示的函数称为有理函数，即

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

我们总假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间是没有公因式的。则当 $n<m$ 时，上式称为真分式；当 $n\geqslant m$ 时，上式称为假分式。

2. 有理函数不定积分的求法

利用多项式的除法，总可以将一个假分式化为一个多项式与一个真分式之和，而多项式的积分容易求得，故求有理函数的积分归结为求真分式的积分。

由中学数学中实系数多项式的因式分解定理可知：任何实系数多项式 $Q(x)$ 在实数范围内可唯一地分解成若干个一次多项式的幂与若干个二次多项式的幂的积，即

$$Q(x)=b_0\ (x-c_1)^{\lambda_1}\cdots\ (x-c_s)^{\lambda_s}\ (x^2+p_1x+q_1)^{\mu_t}\cdots\ (x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$$

其中，$b_0\neq0,\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_t$ 为正整数，$\lambda_1+\cdots+\lambda_s+\mu_1+\cdots+\mu_t=m$，$p_i^2-4q_i<0$，$i=1,2,\cdots,t$。

那么，由部分分式定理，真分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可以唯一地分解为如下部分分式：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-c_1}+\frac{A_2}{(x-c_1)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_1}}{(x-c_1)^{\lambda_1}}+\cdots\\&\quad+\frac{B_1}{(x-c_s)}+\frac{B_2}{(x-c_s)^2}+\cdots+\frac{B_{\lambda_s}}{(x-c_s)^{\lambda_s}}\\&\quad+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{\mu_1}x+D_{\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\cdots\\&\quad+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+p_tx+q_t)}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\cdots+\frac{E_{\mu_t}x+F_{\mu_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}}\end{aligned}$$

其中，$A_i,\cdots,B_i,C_i,D_i,\cdots,E_i,F_i$ 都是待定常数，可由比较法或赋值法求出。

由此任何有理真分式的不定积分，都可归结为求以下两种形式的不定积分：

（Ⅰ）$\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$；（Ⅱ）$\displaystyle\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x\ (p^2-4q<0)$

对于（Ⅰ），根据求不定积分的公式可知

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln|x-a|+C & k=1\\ \dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C & k>1\end{cases}$$

对于（Ⅱ），只要做适当换元$\left(令\ t=x+\dfrac{p}{2}\right)$，便化为

$$\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\int\frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t=L\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t+N\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{L}{2}\ln(t^2+r^2)+\dfrac{N}{r}\arctan\dfrac{t}{r}+C & k=1\\ -\dfrac{L}{2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}}+N\displaystyle\int\dfrac{dt}{(t^2+r^2)^k} & k\geqslant 2\end{cases}$$

其中 $r^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，$N=M-\dfrac{p}{2}L$。

对于不定积分 $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$，记 $I_k=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$，可用分部积分法导出递推公式如下：

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{1}{r^2}\int\frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}dt\\&=\frac{1}{r^2}I_{k-1}-\frac{1}{r^2}\int\frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}dt\\&=\frac{1}{r^2}I_{k-1}-\frac{1}{2r^2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)\\&=\frac{1}{r^2}I_{k-1}+\frac{1}{2r^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}}-I_{k-1}\right]\end{aligned}$$

经整理得到

$$I_k=\frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}$$

重复使用上述递推公式，最终归为计算 I_1，这样就可以完成对不定积分(Ⅱ)的计算。

例 4.4.1 分解$\dfrac{x^3-4x+10}{x^2+x-6}$成最简分式。

解 $\dfrac{x^3-4x+10}{x^2+x-6}=x-1+\dfrac{3x+4}{x^2+x-6}=x-1+\dfrac{3x+4}{(x-2)(x+3)}$

而真分式$\dfrac{3x+4}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

其中，A、B 为待定常数，A、B 可有两种方法求出。

方法一：(比较法)$3x+4=A(x+3)+B(x-2)=(A+B)x+(3A-2B)$

上式是恒等式，比较等式两边 x 的同次幂系数相等，得

$$\begin{cases}A+B=3\\2A-2B=4\end{cases}$$

即 $A=2$，$B=1$。

方法二：(赋值法)$3x+4=A(x+3)+B(x-2)$

令 $x=2$，得 $A=2$，

令 $x=-3$，得 $B=1$，

所以

$$\frac{x^3-4x+10}{x^2+x-6}=x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x+3)}$$

例 4.4.2 求$\displaystyle\int\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}dx$。

解　设$\dfrac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}+\dfrac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{A\ (1+x^2)^2+(Bx+C)(1+x)(1+x^2)+(Dx+E)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

得恒等式 $2x=A\ (x^2+1)^2+(Bx+C)(1+x)(x^2+1)+(Dx+E)(1+x)$

$=(A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+(A+C+E)$

比较等式两边 X 的同次幂系数相等，有

$$\begin{cases}A+B=0\\B+C=0\\2A+B+C+D=0\\B+C+D+E=2\\A+C+E=0\end{cases}$$

即 $A=-\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{2}$，$C=-\dfrac{1}{2}$，$D=1$，$E=1$。

故$\dfrac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{1+x^2}+\dfrac{x+1}{(1+x^2)^2}$

所以$\displaystyle\int\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{1+x^2}dx+\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

对于不定积分$\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$，有两种方法可以求解。

方法一：

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}.\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot I_1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

方法二：$x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t dt$，

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt=\int\cos^2 t dt$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$$

得

$$\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+x^2} + C$$

从理论上说,利用上述方法求有理函数的积分是行之有效的,但是,有时用此方法,计算较麻烦,故对有理函数积分,可根据被积函数的特点,恰当选择拆项方法能给有理函数的积分带来方便。

例 4.4.3 求$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2+1}{x^2(1+x^2)} &= \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2+1}{x^2(1+x^2)}\\ &= \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

4.4.2 三角函数有理式$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$型的不定积分

由 $u(x)$,$v(x)$及常数经过有限次的四则运算所得到的函数称为关于$u(x)$,$v(x)$的有理式,并且用$R(\sin x,\cos x)$表示。

$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 型是三角函数的有理式积分,这种类型的积分一般可通过代换 $t=\tan\frac{x}{2}$,把它化为 t 的有理函数的不定积分,这是因为

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

所以

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

例 4.4.4 求$\int \frac{3-\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$。

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$,于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{3-\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{3-\frac{2t}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{3t^2-2t+3}{(t^2+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t \\
&= \int\left(\frac{2t+3}{t^2+2}-\frac{2t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t+\int \frac{3}{t^2+2}\mathrm{d}t-\int \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \ln(t^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}-\ln(t^2+1)+C \\
&= \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C \\
&= \ln\frac{3+\cos x}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

上面所用的变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的不定积分虽然总是有效的，但并不意味着在任何情况下都是简便的，例如下面的积分使用其他方法计算更简便。

例 4.4.5　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$。

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2} \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C
\end{aligned}$$

4.4.3　某些无理根式的不定积分

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型不定积分 $(ad-bc\neq 0)$

求这种类型的不定积分只需令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，就可以化为有理函数的不定积分。

例 4.4.6　求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x$。

解　令 $t=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$，则 $x=\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{-8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
&= \int\left(\frac{2}{1-t^2}-\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C
\end{aligned}$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{(x+2)/(x-2)}}{1-\sqrt{(x+2)/(x-2)}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ 型不定积分($a>0$ 时 $b^2-4ac\neq 0$；$a<0$ 时 $b^2-4ac>0$)

这种类型的不定积分一般可用如下变换：

若 $a>0$,则可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$$

若 $c>0$,还可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

这类变换称为欧拉变换。

例 4.4.7 求$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\mathrm{d}x$。

解 令 $\sqrt{x^2-2x-3}=x-t$,则

$$x = \frac{t^2+3}{2(t-1)}, \mathrm{d}x = \frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t, \sqrt{x^2-2x-3} = \frac{t^2+3}{2(t-1)} - t = \frac{-(t^2-2t-3)}{2(t-1)}$$

于是,所求不定积分可化为有理函数的不定积分：

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\mathrm{d}x = \int \frac{2(t-1)}{t^2+3} \cdot \frac{2(t-1)}{-(t^2-2t-3)} \cdot \frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t = -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}} + C$$

在本章结束之前,必须指出：对初等函数来说,在其定义区间上,它的原函数一定存在,但原函数不一定都是初等函数。如 $\int e^{x^2}\mathrm{d}x$,$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 等,原函数虽然存在,但不能用初等函数表示,以后学了无穷级数的知识就清晰明了了。

习题 4.4

1. 求下列不定积分。

(1) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{5-3\cos x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$

第 4 章习题参考答案

习题 4.1

1. $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$　　2. $\arctan x\mathrm{d}x$　　3. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$

4. $F[\varphi(x)]+C$　5.（B,C,D）　6.（A）　7.（A,B,D）　8.（C）　9.（A）
10.（D）　11.（D）　12.（C）　13.（C）　14.（B）

15.（1）$x-\frac{2}{3}x^3+C$　（2）$\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3+C$

（3）$\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$　（4）$2\sqrt{x}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

（5）$\frac{x^2}{6}-\ln|x|-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+C$　（6）$-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C$

（7）$\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}-\arcsin x+C$　（8）$2x-2\arctan x+C$

（9）$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$　（10）$\arctan x-\frac{1}{x}+C$

（11）$x-\arctan x+C$　（12）$\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

（13）$\frac{1}{2}(\tan x+x)+C$　（14）$-\cot x-\tan x+C$

（15）$\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$　（16）$-\cot x-x+C$

（17）$\sin x-\cos x+C$　（18）$\tan x-\cot x+C$

（19）$\arcsin x+C$

16. $y=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$

17. $C(x)=2\sqrt{x}+\frac{x}{2000}+10, R(x)=100x-x^2$

18. $Q=f(P)=-10000e^{-\frac{P}{2}}+20000$

19. $P(t)=\frac{5}{2}t^2+3t$

20. $x=50$ 个单位，最大利润为 750 元

21. $x=3$ 个单位时，利润最大

习题 4.2

1.（1）$\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$　（2）$\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C$

（3）$\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$　（4）$3\sqrt[3]{\sin x}+C$

（5）$-8\arctan\cos x+C$　（6）$\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

（7）$-e^{\cos x}+C$　（8）$-\frac{3}{2}(\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$

（9）$\arcsin \ln x+C$　（10）$-\frac{1}{2\ln^2 x}+C$

（11）$\frac{2}{3}\sqrt{1+3\ln x}+C$　（12）$-\frac{1}{3}\ln^3(\cos x+1)+C$

（13）$-\cos(C+\ln x)$　（14）$\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

(15) $\cos\frac{1}{x}+C$

(16) $-\frac{1}{\ln 3}(\cos x+1)+C$

(17) $\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|+C$

(18) $-\ln\left|\sec\frac{1}{x}+\tan\frac{1}{x}\right|+C$

(19) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

(20) $\sqrt[3]{x^3-5}+C$

(21) $-\frac{1}{12}e^{-3x^4}+C$

(22) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C$

(23) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$

(24) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+3\arctan x+C$

(25) $\frac{1}{39}(3x+2)^{13}+C$

(26) $-\frac{1}{14}(3-4x)^{\frac{7}{2}}+C$

(27) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

(28) $-\frac{1}{4(2x-1)^2}+C$

(29) $\frac{3}{2}\ln\left|\sec\left(\frac{2}{3}x+5\right)+\tan\left(\frac{2}{3}x+5\right)\right|+C$

(30) $\frac{1}{a}f(ax+b)+C$

(31) $\frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2}+C$

(32) $\frac{1}{4}\arctan\frac{2x+1}{2}+C$

(33) $\frac{1}{3}\arcsin\sqrt{3}x+C$

(34) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{3}+C$

(35) $\frac{1}{30}\ln\left|\frac{3+5x}{3-5x}\right|+C$

(36) $\frac{1}{8\sqrt{8}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{8}}{4x+1+\sqrt{8}}\right|+C$

(37) $\frac{1}{4}\ln\left|4x+\sqrt{4+16x^2}\right|+C$

(38) $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-16}\right|+C$

(39) $\sin e^x+C$

(40) $\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}+C$

(41) $e^{e^x}+C$

(42) $\arctan e^x+C$

(43) $x-\ln(e^x+1)+C$

(44) $\frac{2}{9}(4+3e^x)^{\frac{3}{2}}+C$

(45) $\arcsin e^x+C$

(46) $-\frac{1}{\ln 3}\cos 3^x+C$

(47) $\frac{1}{\ln 2}\sin(2^x+1)+C$

(48) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{3^x}{2}+C$

(49) $\frac{1}{3\ln 2}\arctan\frac{2^x}{3}+C$

(50) $\frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$

(51) $e^{\tan x}+C$

(52) $\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$

(53) $\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C$

(54) $\frac{1}{2}[\ln|1+\tan x|]+x-\ln|\sec x|+C$

(55) $-\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\cot x}+C$

(56) $-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x+x+C$

(57) $-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$　　(58) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$

(59) $\frac{1}{2(\arccos x)^2}+C$　　(60) $3\sqrt[3]{\mathrm{arctg} x}+C$

(61) $-\frac{1}{2}(\mathrm{arccot} x)^2+C$　　(62) $-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3x^2+2}+C$

(63) $-\frac{1}{3}\sin\sqrt{4-3x^2}+C$　　(64) $\ln|x^2-3x+1|+C$

(65) $\ln(e^x+e^{-x})+C$　　(66) $-\frac{1}{2}\ln|9-e^{2x}|+C$

(67) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$

(68) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+7)-\frac{2}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C$

(69) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

(70) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+C$　　(71) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

(72) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(73) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(74) $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$

2. (1) $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$

(2) $\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{1}{2}}(x+6)+C$

(3) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C$

(4) $2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)+C$

(5) $\sqrt{2x-3}-\ln(\sqrt{2x-3}+1)+C$

(6) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{6}}+6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1|+C$

(7) $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$

(8) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$　　(9) $\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C$

(10) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C$　　(11) $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C$

(12) $\frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$　　(13) $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$

(14) $-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C$ (15) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

(16) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$ (17) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

(18) $\arccos\frac{1}{x}+C$

习题 4.3

1. (1) $(2x^2+1)e^x-4x\ e^x+4\ e^x+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2\ e^{2x}-\frac{1}{2}x\ e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$

(3) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$ (4) $-x\cos x+\sin x+C$

(5) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

(6) $-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+C$

(7) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$ (8) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$

(9) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$ (10) $\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2+C$

(11) $\frac{x^2}{2}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\arcsin x+C$

(12) $\frac{1}{4}x^4\operatorname{arccot}x+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\operatorname{arccot}x+C$

(13) $x\ln x-x+C$ (14) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

(15) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(16) $x\ln(x^2+1)-2(x-\arctan x)+C$

(17) $x(\ln x)^2-2(x-\arctan x)+C$

(18) $\frac{1}{2}(x^2e^{x^2}-e^{x^2})+C$

(19) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

(20) $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

(21) $\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

(22) $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$

(23) $x\tan x+\ln|\cos x|+C$ (24) $-x\cot x+\ln|\sin x|+C$

2. (1) $2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C$

(2) $e^{\sqrt{2x-1}}(\sqrt{2x-1}-1)+C$

(3) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

(4) $(2x-4)\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right|+C$

(5) $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$

(6) $-2\sqrt{1x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(7) $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$　　(8) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$

(9) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

(10) $\frac{1}{6}(2x+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+3}\arctan\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}\ln(2x+4)+C$

3. (A,B,C)

习题 4.4

(1) $4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$

(2) $\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

(3) $\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C$　　(4) $\ln\left|\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}\right|+C$

(5) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|+C$

第 5 章　定积分及其应用

定积分是积分学的另一基本问题，它与导数的概念一样，也是在分析、解决实际问题的过程中逐渐形成并发展起来的，在几何学、物理学、经济学等领域有着广泛的应用。本章将从实例出发引出定积分的概念，讨论它的性质，进而寻求它的计算方法，最后通过例题介绍定积分在几何学以及经济学中的一些应用。

5.1　定积分的概念与性质

5.1.1　定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

在直角坐标系中，设曲线 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上非负、连续，由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$所围成的平面图形称为曲边梯形，如图 5-1(a)所示，其中曲线弧 $y=f(x)$称为曲边，线段 ab 称为底边。

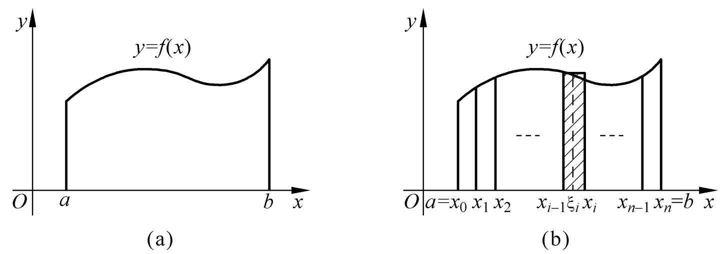


图　5-1

怎样计算曲边梯形的面积 A 呢？如果 $f(x)$在$[a,b]$上为常数 h，即曲边梯形为矩形，则其面积等于 $h(b-a)$。现在的困难是它的高度不断连续变化，我们可以考虑将曲边梯形分割成许多垂直于 x 轴的窄曲边梯形；在这些窄曲边梯形上，高度变化不大，可用其中某一点处的高来近似代替同一小区间上窄曲边梯形的变高，得到每个小窄曲边梯形面积的近似值；再把所有近似值相加，就得到整个曲边梯形面积的近似值；分割越细，近似的程度就越高，当无限细分时，就可得到曲边梯形面积的精确值。具体计算方法如下。

(1) 分割

在区间$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，令 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

各小区间的长度分别记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。

过每个分点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$作平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲

边梯形，如图 5-1(b)所示，它们的面积分别记为 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) 近似

在第 i 个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$上任取一点 ξ_i，以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$为高的小矩形面积近似代替第 i 个小曲边梯形的面积 ΔA_i，于是

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i,(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和

将 n 个小矩形面积加起来，得到的和作为曲边梯形面积的近似值，即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限

记所有小区间长度的最大值为 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda\to 0$ 时(等分时 $n\to\infty$)，分割充分细密，上面和式就可以无限接近曲边梯形的面积 A，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

当物体作匀速直线运动时，路程＝速度×时间。但现实中，速度往往是随时间变化的变量，采用上述分割、近似、求和、取极限的思想，可求出变速直线运动的路程。

设物体运动的速度 $v=v(t)$是时间段$[T_1,T_2]$上的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，对路程的计算步骤如下。

(1) 分割

在时间段$[T_1,T_2]$内任意插入 $n-1$ 个分点 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$，令 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$，将时间段$[T_1,T_2]$分成 n 个小时间段

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{i-1},t_i],\cdots,[t_{n-1},t_n]$$

各小时间段的长度分别记为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) 近似

在第 i 个小时间段$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$上任取一点 τ_i，以 Δt_i 为时间长度、$v(\tau_i)$为速度的匀速、直线路程近似代替第 i 个小时间段内的变速直线运动的路程 Δs_i，于是

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i,(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和

将 n 个小匀速直线路程加起来，得到的和作为整个时间段变速直线运动路程的近似值，即

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

(4) 取极限

记所有小时间段长度的最大值为 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda\to 0$ 时(等分时 $n\to\infty$)，各小时间段近乎匀速运动，上面和式就可以无限接近$[T_1,T_2]$上的变速直线运动的路程，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

以上虽是不同范畴的两个实际问题，但从数学的角度来看，其解决问题的思想和方法

是相同的,最后归结为求和式的极限问题,在科学技术和经济领域中有大量的问题归结为这类数学模型。因此,数学家把这一方法加以概括抽象,得到了定积分。

5.1.2 定积分的定义

定义 5.1.1 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界,在$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点 x_1, x_2,…,x_{n-1},即

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

各小区间的长度分别记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$,并求和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)x_i$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$,如果不论对$[a,b]$怎样划分,也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点 ξ_i 怎样选取,只要当 $\lambda\to 0$ 时,和 s_n 总趋于确定的极限 I,即

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这时称函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,其中 $f(x)$称为被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式,x 称为积分变量,a 称为积分下限,b 称为积分上限,$[a,b]$称为积分区间,s_n称为 $f(x)$的一个积分和。

根据定积分的定义,前面的两个例子可用定积分表示如下:

(1) 曲边梯形的面积 A 是函数 $f(x)(f(x)\geqslant 0)$在区间$[a,b]$上的定积分,即

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 变速直线运动的路程 s 是速度 $v=v(t)$在时间段$[T_1,T_2]$上的定积分,即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\mathrm{d}t$$

注意:(1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)x_i$ 的极限,是一个数值,这与不定积分不同。

(2) 定积分的值只与被积函数 $f(x)$及积分区间$[a,b]$有关,而与积分变量的记号无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(3) 极限过程是 $\lambda\to 0$,而不仅仅只是 $n\to\infty$,前者是无限细分的过程,后者是分点无限增加的过程。无限细分,分点必然无限增加,但分点无限增加,并不能保证无限细分。

(4) 在定积分定义中，假定了 $a<b$，为了后面的计算及应用方便，我们规定：

当 $a>b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

当 $a=b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

所以定积分上、下限无大小限制。

(5) 关于函数的可积性，我们直接给出下面两个重要结论：

① 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积；

② 若 $f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积。

5.1.3　定积分的几何意义

1. 若连续函数 $f(x)$在$[a,b]$上非负，即 $f(x)\geqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A，如图 5-2 所示。

2. 若连续函数 $f(x)$在$[a,b]$上非正，即 $f(x)\leqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数 $-A$，如图 5-3 所示。

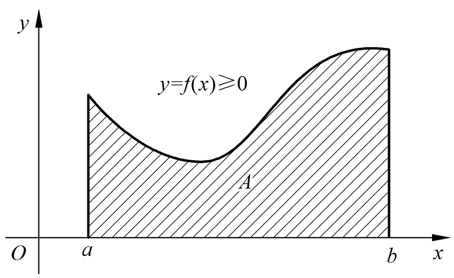


图　5-2

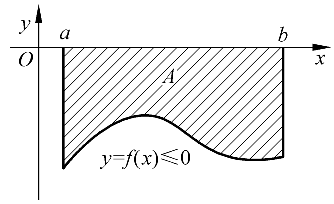


图　5-3

3. 若连续函数 $f(x)$在$[a,b]$上既取得正值又取得负值时，即函数 $f(x)$的图形某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴的下方，如图 5-4 所示，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的代数和，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4$$

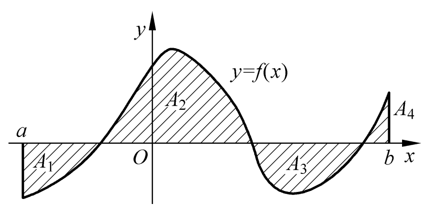


图　5-4

5.1.4 定积分的性质

设下面性质中各函数均可积，由定积分与极限运算法则和性质可推出如下性质。

性质 1 函数代数和的定积分等于定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

此性质可推广到有限个函数。

性质 2 常数可提到积分号的外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad (k\text{ 为常数})$$

性质 3 （积分区间的可加性）对于任意三个不相等的数 a, b, c，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

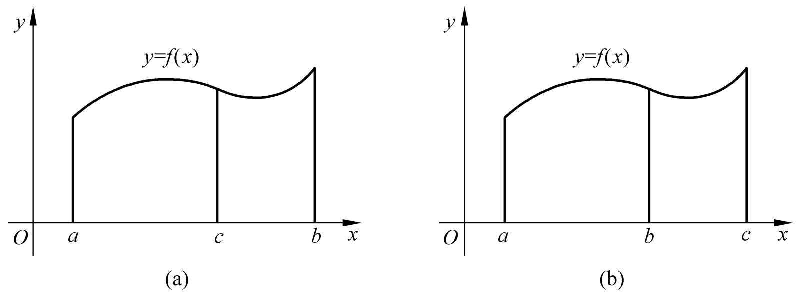


图 5-5

性质 3 的几何意义：当 $c \in (a,b)$时，见图 5-5(a)，上式显然成立；当 $a<b<c$ 时，见图 5-5(b)，则有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

因为 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$，所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

当 $c<a<b$ 时，同理可验证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 成立。

性质 4 若在区间$[a,b]$上 $f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$。

性质 5 若在区间$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，如 $f(x)$连续，等号在 $f(x)\equiv 0$ 时成立。

推论 1 若在区间$[a,b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，如 $f(x)$，$g(x)$连续，等号在 $f(x)\equiv g(x)$时成立。

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x, a<b$。

性质 6　(估值定理)若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值分别为 M 与 m,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

证明　因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,由性质 5 和推论 1,得

$$m\int_a^b \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x$$

由性质 2 和性质 4,得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

此性质说明,由被积函数在积分区间上的最大值和最小值可估计积分值的范围。它的几何意义是:由曲线 $y=f(x)$,$x=a$,$x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积,介于以区间$[a,b]$为底,以最小纵坐标 m 为高的矩形面积及最大纵坐标 M 为高的矩形面积之间,如图 5-6 所示。

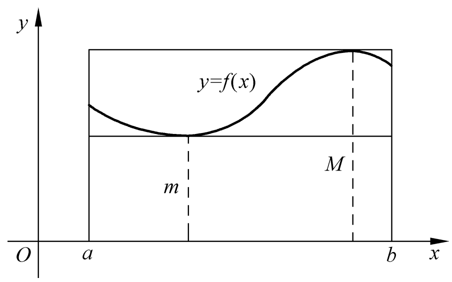


图　5-6

性质 7　(积分中值定理)设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在区间$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),a\leqslant\xi\leqslant b$$

证明　因为 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,所以 $f(x)$在区间$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m。由性质 6,得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

从而

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant M$$

根据闭区间上连续函数的介值定理知,在区间$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a},a\leqslant\xi\leqslant b$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),a\leqslant\xi\leqslant b$$

性质 7 的几何意义:若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,则由 $x=a$,$x=b$,x 轴,$y=$

$f(x)$所围成的曲边梯形的面积一定与某个同底边而高为 $f(\xi)$,$\xi\in[a,b]$的矩形面积相等,如图 5-7 所示。通常称 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值。

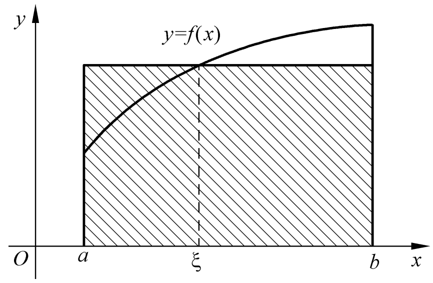


图 5-7

例 5.1.1 比较定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 的大小。

解 在闭区间$[0,1]$上有 $x^2\leqslant x$,从而 $\mathrm{e}^{x^2}\leqslant \mathrm{e}^x$,等号在 $x=0$ 与 $x=1$ 两点成立,由性质 5 和推论 1 知

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

例 5.1.2 证明不等式$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$。

证明 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$,$x\in[0,2]$,则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}\in(0,2)$;

而 $f(0)=1$,$f(\dfrac{1}{2})=\mathrm{e}^{\frac{-1}{4}}$,$f(2)=\mathrm{e}^2$,得 $f(x)$在$[0,2]$上,最大值 $M=e^2$,最小值 $m=\mathrm{e}^{\frac{-1}{4}}$。

由性质 6,有

$$\mathrm{e}^{\frac{-1}{4}}(2-0)\leqslant\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^2(2-0)$$

即

$$2\mathrm{e}^{\frac{-1}{4}}\leqslant\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$$

习题 5.1

1. 利用定积分的几何意义确定下列定积分的值。

(1) $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^1 |2-x|\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (4) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

2. 不计算积分,利用定积分的性质,比较下列各组积分的大小。

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 e^x dx$ 与 $\int_0^1 e^{x^2} dx$　　(4) $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

(5) $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$　　(6) $\int_0^1 e^x dx$ 与 $\int_0^1 (1+x) dx$

3. 利用定积分的性质,估计下列定积分的值。

(1) $\int_1^4 (x^2+1) dx$　　(2) $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:

(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $f(x)$ 不恒等于 0,则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x) dx = 0$,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$。

5.2　微积分基本公式

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定积分存在,怎样计算这个积分值呢?由上一节内容可知,用求和式极限的方法,即使被积函数变简单,用定义计算定积分也很不容易。本节将通过揭示微分和积分的关系,引出计算定积分的一般方法。

5.2.1　积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$x\in[a,b]$,于是 $f(t)$ 在区间 $[a,x]$ 上连续,因此 $\int_a^x f(t) dt$ 存在,如果上限 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动,则对于每一个取定的 x 值,定积分 $\int_a^x f(t) dt$ 有一个对应的值,因此在 $[a,b]$ 上定义一个函数。

定义 5.2.1　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,称

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t) dt,\quad x\in[a,b]$$

为积分上限函数。

定理 5.2.1　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则积分上限函数中 $\Phi(x)=\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a,b]$ 上可导,且其导数为

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t) dt = f(x),\quad x\in[a,b]$$

证明　设 $x\in(a,b)$,任给 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$,则当 $\Delta x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt-\int_a^x f(t) dt\\ &=\left(\int_a^x f(t) dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt\right)-\int_a^x f(t) dt\\ &=\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt\end{aligned}$$

由积分中值定理知,在 x 与 $x+\Delta x$ 之间存在 ξ,使

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而当 $\Delta x \to 0$ 时,$\xi \to x$,从而

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

定理 5.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b, x \in [a,b]$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

证明 设 $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(x)]$$

由复合函数求导法则,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例 5.2.1 求下列函数的导数。

(1) $\Phi(x) = \int_{x}^{2} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求 $\Phi'(x)$; (2) $F(x) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$

解 (1) 因为 $\Phi(x) = \int_{x}^{2} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = -\int_{x}^{2} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,所以 $\Phi'(x) = -\frac{\sin x}{x}$;

(2) 由公式,得

$$F'(x) = \mathrm{e}^{(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})' = \mathrm{e}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例 5.2.2 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_{\cos x}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$。

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式,用洛必达法则计算。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\int_{\cos x}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\int_{1}^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

5.2.2 微积分基本公式

定理 5.2.3 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则函数

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

定理的重要意义:一方面肯定了连续函数的原函数是存在的,另一方面初步地揭示

了积分学中的定积分与原函数之间的联系。

下面给出用原函数计算定积分的公式。

定理 5.2.4　若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

证明　已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，又根据定理 5.2.3 知，积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x \in [a,b] \tag{5-1}$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数。

因此这两个原函数之差 $F(x) - \Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上必是某一个常数 C，即

$$F(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = C,\quad x \in [a,b]$$

式(5-1)中令 $x=a$，由于 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$，得 $C=F(a)$，即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

再令 $x=b$，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

为便于书写，公式常表示为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{5-2}$$

公式(5-2)称为牛顿-莱布尼兹公式，它进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系，它表明一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量，从而给定积分提供了一个有效而简便的计算方法。

例 5.2.3　求下列定积分。

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-1}^0 \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

(3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

解　(1) 由于 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一个原函数，所以由牛顿-莱布尼兹公式，有

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

(2) 由于 e^x 是 e^x 的一个原函数，$\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\Big|_{-1}^0 + \arctan x\Big|_{-1}^0 \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(3) 由于$\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\sec^2 x+\csc^2 x$,

而 $\tan x$ 是$\sec^2 x$ 的一个原函数,$-\cot x$ 是$\csc^2 x$ 的一个原函数,所以

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\csc^2 x)\mathrm{d}x\\&=\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)-\left(\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\mathrm{d}x\\&=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)-\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\end{aligned}$$

例 5.2.4 求定积分$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases}x & x<1\\x^2 & x\geqslant 1\end{cases}$。

解 $$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2\\&=\frac{17}{6}\end{aligned}$$

例 5.2.5 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & |x|\leqslant 0\\x^2+1 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

求 k 的值(设$|k|\leqslant 2$)使得

$$\int_k^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}$$

解 由区间可加性,有

$$\begin{aligned}\int_k^3 f(x)\mathrm{d}x&=\int_k^2(2x+1)\mathrm{d}x+\int_2^3(1+x^2)\mathrm{d}x\\&=(x^2+x)\big|_k^2+\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_2^3\\&=6-(k^2+k)+\frac{22}{3}\end{aligned}$$

则

$$\frac{40}{3}-(k^2+k)=\frac{40}{3}$$

因此

$$k^2+k=0$$

解得 $k=0,k=-1$。

习题 5.2

1．求下列函数的导数。

(1) $\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$　　(2) $\int_0^{\cos x} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}$　　(4) $\int_a^{\mathrm{e}^x} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\quad(a>0)$

(5) $\int_{x^2}^1 \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta}\mathrm{d}\theta\quad(x>0)$

2．求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\mathrm{d}t$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\int_x^0 t(t-\sin t)\,\mathrm{d}t}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{3x^2+4x^3}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$

3．求下列定积分。

(1) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 100^x\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^1 x^{100}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$　　(6) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x}\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^1 (2x+3)\,\mathrm{d}x$　　(8) $\int_0^{\pi} (\mathrm{e}^x-\sin x)\,\mathrm{d}x$

(9) $\int_1^4 x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$　　(10) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

(11) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

(13) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$　　(14) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x-1, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，计算 $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。

5. 设 $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $F'(0)$。

5.3 定积分的换元积分法与分部积分法

由上一节的内容可知，计算定积分的基本方法是把它转化为求被积函数的原函数的增量。在第 4 章中，我们通过不定积分的换元积分法和分部积分法可以求出一些函数的原函数。因此，在一定条件下，可以用换元积分法和分部积分法来计算定积分。

5.3.1 定积分的换元积分法

定理 5.3.1 设函数在 $f(x)$在区间上$[a,b]$连续，函数 $x=\varphi(t)$满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

(2) 当 t 在 α 与 β 之间变化时，$\varphi(t)$的值都在$[a,b]$上，且 $\varphi'(t)$连续。

则有换元积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证明 设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，又有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t)]=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

可知，$F[\varphi(t)]$是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数，所以

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}t=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

这就证明了换元公式。

注意：① 用 $x=\varphi(t)$把原来变量 x 换成新的变量 t，在求出其原函数后不必变回 x，只需将积分上下限换成相应于新变量 t 的积分上下限就可以了。

② 定积分的换元积分公式从左到右为变量代换法，换元同时必换限；从右到左为凑微分法，此时不需换元。

例 5.3.1 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$。

解 设 $t=\cos x$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$，且

$$当\ x=0\ 时，t=1；当\ x=\frac{\pi}{2}\ 时，t=0$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0 2t^5\mathrm{d}t=2\int_0^1 t^5\mathrm{d}t=2\times\frac{t^6}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

例 5.3.1 中，我们引入了新的积分变量 t，则积分上、下限也应作相应变换，如果用凑微分法计算可以更方便些，具体解法如下：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^5 x\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{2\cos^6 x}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(0-\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

例 5.3.2　计算 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\mathrm{d}x$。

解　$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin x^2\mathrm{d}(x^2) = -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$

例 5.3.3　计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, a>0$。

解　令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，且当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left[1+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2\end{aligned}$$

例 5.3.4　计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$。

解　令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，且

当 $x=0$ 时，$t=1$；$x=4$ 时，$t=3$。

于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3 = \frac{22}{3}\end{aligned}$$

例 5.3.5　设 $f(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上的连续函数，试证：

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时，如图 5-8(a)所示，有 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；

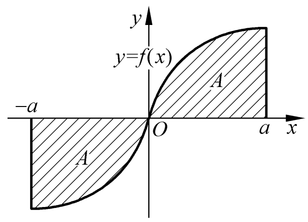
(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，如图 5-8(b)所示，有 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

证明　因为

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

对积分 $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$，作替换 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$



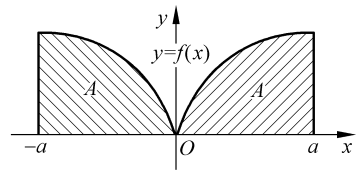


图　5-8

所以

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结论：

(1) 当 $f(x)$是奇函数时，$f(x)+f(-x)=0$，故 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 当 $f(x)$是偶函数时，$f(x)+f(-x)=2f(x)$，故 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

利用例 5.3.5 的结论，计算奇函数、偶函数在关于原点对称的区间上的定积分时，可使计算更简单，如因为$\dfrac{|x|\sin x}{(1+x^2)\cos x^3}$是奇函数，所以 $\int_{-2}^{2} \dfrac{|x|\sin x}{(1+x^2)\cos x^3}\mathrm{d}x = 0$。

例 5.3.6　计算 $\int_{-1}^{1}(x^2-3x\cos x+2)\mathrm{d}x$。

解　因为 x^2+2 是偶函数，$3x\cos x$ 是奇函数，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2-3x\cos x+2)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}(x^2+2)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}3x\cos x\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1}(x^2+2)\mathrm{d}x - 0 \\ &= 2\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

例 5.3.7　设函数 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2}, & -1<x<0 \\ \sin 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$，计算 $\int_{0}^{3} f(x-1)\mathrm{d}x$。

解　令 $x-1=t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，且当 $x=0$ 时，$t=-1$；当 $x=3$ 时，$t=2$，故

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3} f(x-1)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{0}^{2}\sin 2t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{2}(-\cos 4+\mathrm{e}^{-1})\end{aligned}$$

5.3.2　定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$，$v(x)$在区间$[a,b]$上有连续导数 $u'(x)$，$v'(x)$，则有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)。$$

等式两边在上求定积分

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

移项,得到定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

与不定积分的计算一样,一般按指数函数、三角函数、幂函数、对数函数、反三角函数的顺序依次选为凑微分的对象,定为 $v(x)$。

例 5.3.8　计算下列定积分。

(1) $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解　(1) $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} =-2$

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}\ln x = \mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e} - x\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1$

(3) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x &= x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_1^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}\arcsin x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

(4) 令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,且当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=4$ 时,$t=2$,故

$$\begin{aligned}\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^2 \mathrm{e}^t 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^2 t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)\\ &= 2\left(t\mathrm{e}^t\,|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\\ &= 2(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^t\,|_0^2) = 2(\mathrm{e}^2+1)。\end{aligned}$$

例 5.3.9　证明定积分公式。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}(n=1,2,\cdots)$$

证明：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$，且当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$，故

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

于是

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d\cos x$$

$$=-(\sin^{n-1}x\cdot\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d\sin^{n-1}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

得递推公式

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

由于，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，所以当 n 为正偶数时，由递推公式得到

$$I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

由于，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，所以当 n 为大于 1 的正奇数时，由递推公式得到

$$I_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$$

习题 5.3

1. 计算下列定积分

(1) $\int_0^1(2x-1)^{100}dx$；

(2) $\int_{-2}^1\frac{dx}{(11+5x)^3}$；

(3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$；

(4) $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^3\varphi \mathrm{d}\varphi$；

(6) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \mathrm{d}u$；

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \mathrm{d}x$；

(9) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$

(10) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；

(11) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$；

(12) $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$；

(13) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$；

(14) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$

2. 计算下列定积分。

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi} x\sin 2x \mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \mathrm{d}x$；

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 \arctan x \mathrm{d}x$；

(6) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x| \mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x \mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$

3. 利用函奇偶性计算下列定积分。

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-5}^5 \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-1}^1 |x| \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\end{cases}$，求定积分$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$。

5.4　定积分的应用

本节主要介绍定积分在几何与经济中的一些应用，读者不仅要掌握这些量的具体计算公式，更重要的是学会用本节将要介绍的"元素法"分析实际问题的思想方法。

5.4.1　定积分的元素法

1. 曲边梯形的面积计算

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，求以曲线 $y=f(x)$为曲边、底为$[a,b]$的曲边梯形的面积 A，如图 5-9 所示。

由 5.1 小节定积分定义，求曲边梯形的面积 A 的步骤如下。

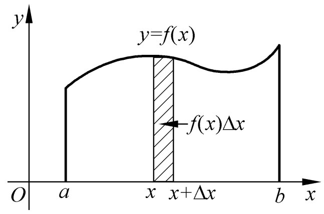


图 5-9

(1) 分割,化整为零

将$[a,b]$任意分为长度为Δx_i的n个小区间,相应地将曲边梯形分成n个小曲边梯形,第i个小曲边梯形的面积为ΔA_i;

(2) 取近似,以直代曲,以矩形代替曲边梯形,给出"零"的近似值。

在每个小区间$[x_{i-1},x_i](i=l,\cdots,n)$上任取一点$\xi_i$,计算$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i K$。

(3) 求和,积零为整,给出"整"的近似值

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限,使近似值向精确值转化。

取$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$,则有

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

比较$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}$对应$\int_a^b$,$f(\xi_i)\Delta x$对应$f(x)\mathrm{d}x$。

由实际问题,一般容易确定积分区间,所以要想得到一个定积分表达式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,关键是确定被积表达式$f(x)\mathrm{d}x$,也记$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$(称为面积元素)。

2. 元素法应用的条件和步骤

能用定积分计算的量U,应满足下列三个条件:

(1) U与变量x的变化区间$[a,b]$有关;

(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性;

(3) U部分量ΔU_i可近似地表示成$f(\xi_i)\Delta x_i$。

步骤:

(1) 根据问题,选取一个变量x为积分变量,并确定它的变化区间$[a,b]$。

(2) 设想将区间$[a,b]$分成若干小区间,取其中的任一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,求出它所对应的部分量ΔU的近似值

$$\Delta U\approx f(x)\mathrm{d}x(f(x)\text{ 为}[a,b]\text{ 上一连续函数})$$

则称$f(x)\mathrm{d}x$为量U的元素,且记作$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$。

(3) 以U的元素$\mathrm{d}U$作被积表达式,以$[a,b]$为积分区间得

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

因此方法称为元素法(也称为微元法),其实质是找出U的元素$\mathrm{d}U$的微分表达式

$$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x(a\leqslant x\leqslant b)$$

5.4.2　平面图形的面积

1. 直角坐标系中的情形

根据定积分的定义我们知道，由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

设曲边形由两条曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$（其中 f_1，f_2 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f_1\leqslant f_2$）及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，如图 5-10 所示，由元素法得曲边形的面积

$$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

其中，$[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$ 为面积元素。

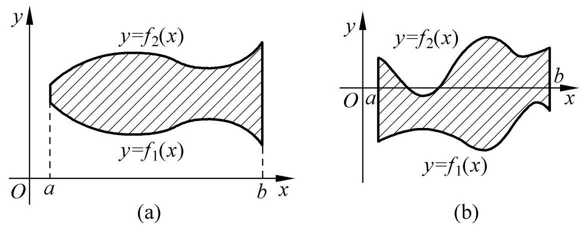


图　5-10

同理，如果曲边形由两条曲线 $x=\varphi_1(y)$，$x=\varphi_2(y)$（其中 φ_1，φ_2 是 $[c,d]$ 上的连续函数，且 $\varphi_1\leqslant\varphi_2$）及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成，如图 5-11 所示，由元素法得曲边形的面积

$$A=\int_c^d[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\mathrm{d}y$$

其中，$[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\mathrm{d}y$ 为面积元素。

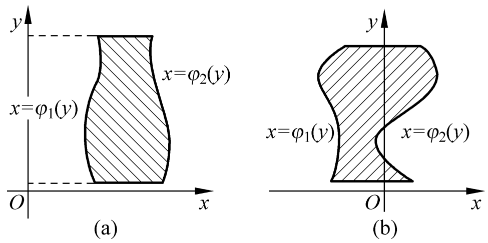


图　5-11

其解题步骤如下：

(1) 画出图示；

(2) 求出交点；

(3) 根据图形的特点选择适当的积分变量，即选择对 x 积分还是对 y 积分，确定上下限，求面积。

例 5.4.1　求由曲线 $y=x^3$ 及直线 $y=x$ 在第一象限所围成的图形的面积。

解法 1　如图 5-12 所示，由方程组 $\begin{cases}y=x^3\\ y=x\end{cases}$，可得这两条曲线的交点为 $(0,0)$，$(1,1)$，

从 x 轴看,图形介于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间,所以

$$A=\int_0^1 (x-x^3)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

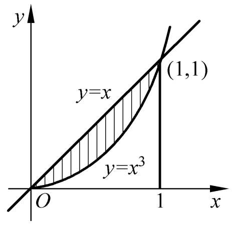


图　5-12

解法 2　同样先求出交点为(0,0),(1,1),从 y 轴看,图形介于 $y=0$ 与 $y=1$ 之间,所以

$$A=\int_0^1 (\sqrt[3]{y}-y)\,\mathrm{d}y=\left(\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

例 5.4.2　求抛物线 $y^2=2x$ 及直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积。

解　如图 5-13 所示,由方程组 $\begin{cases}y^2=2x\\ y=x-4\end{cases}$,可得这两条曲线的交点为(2,−2),(8,4)。从 y 轴看,图形介于 $y=-2$ 与 $y=4$ 之间,所以

$$A=\int_{-2}^2\left(4+y-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\left(4y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^1=18$$

如果考虑取横坐标 x 为积分变量,则图形介于 $x=0$ 与 $x=8$ 之间。但是,在 $x=0$ 与 $x=8$ 之间图形的下边缘无法用一个函数表达,所以必须将图形分成两个部分分别计算面积。其计算式如下:

$$A=\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x$$

可见,这时取横坐标 x 为积分变量使得计算式变得复杂了。

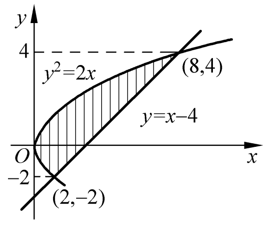


图　5-13

例 5.4.3　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积。

解　由于椭圆图形关于两个坐标轴对称,知其面积是椭圆在第一象限部分的四倍,第一象限部分在 x 轴上的投影区间为 $[0,\ a]$,面积元素为 $y\mathrm{d}x$,所以

$$S=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，作变量替换，令 $x=a\cos t$，则 $y=b\sin t$，$dx=-a\sin t\,dt$，从而有

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\,d(a\cos t)=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=ab\pi$$

2. 极坐标系中的情形

有些平面曲线用极坐标 $\rho=\varphi(\theta)$ 表示较为简单，故其平面图形面积在极坐标系中计算比较方便。设由连续曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的平面图形称为曲边扇形，如图 5-14 所示。

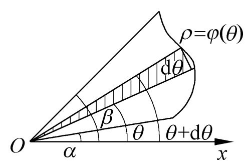


图　5-14

若极角 θ 为积分变量，$\theta\in[\alpha,\beta]$，任取小区间$[\theta,\theta+d\theta]$，其对应的小曲边扇形的面积用半径为 $\rho=\varphi(\theta)$、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形面积来近似，则曲边扇形的面积元素为

$$dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

故曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

例 5.4.4　求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$，$a>0$ 所围成的图形的面积。

解　心形线所围平面图形如图 5-15 所示，此图形对称于极轴，因此所求图形面积 A 是极轴以上部分图形面积的两倍。

$$A=2\int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{3}{2}a^2\pi$$

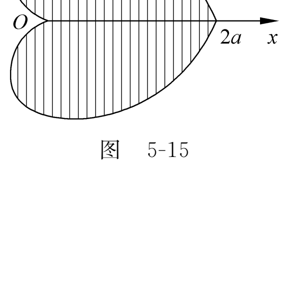


图　5-15

例 5.4.5 计算双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 所围平面图形的面积。

解 双纽线所围平面图形如图 5-16 所示，因为 $\rho^2\geqslant0$，故 θ 取值范围是 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 及 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，由图形的对称性，得

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

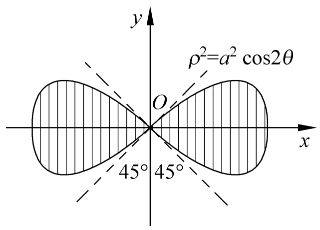


图 5-16

5.4.3 立体的体积

用定积分计算立体的体积，我们只考虑下面两种简单情形，对一般立体体积的计算将在二重积分中讨论。

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条定直线旋转一周而成的立体，该定直线叫作旋转轴。常见的旋转体有圆柱、圆锥、圆台、球体等。

设一旋转体由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成，如图 5-17 所示。用元素法求其体积：取 x 为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$。

(1) 在区间$[a,b]$上任取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，设与此小区间相对应的那部分旋转体的体积为 ΔV，则 ΔV 近似于以 $f(x)$为底半径、以 $\mathrm{d}x$ 为高的小圆柱体的体积，从而得体积元素为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

(2) 以 $\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间上作定积分，得所求旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi y^2\mathrm{d}x=\int_a^b\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

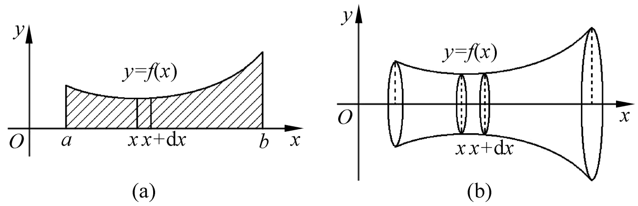


图 5-17

类似地，由连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d(c<d)$及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y=\int_c^d \pi\varphi^2(y)\mathrm{d}y$$

例 5.4.6　求由 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴旋转一周构成的圆锥体体积。

解　该圆锥体如图 5-18 所示，它是由△OPA 所围区域绕 x 轴旋转一周而生成的，由公式得圆锥体的体积为

$$V=\int_0^2 \pi y^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^2=\frac{2\pi}{3}$$

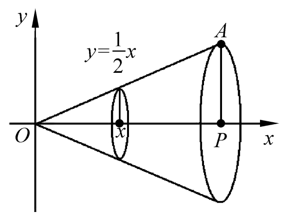


图　5-18

例 5.4.7　计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体（旋转椭球体）的体积。

解　这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体体积元素为 $\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x$，于是所求旋转椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

2. 已知平行截面面积的立体的体积

设空间某立体（如图 5-19 所示）在 $x=a$，$x=b$ 垂直于 x 轴的两平面之间且过任意点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$垂直于 x 轴的截面面积 $A(x)$是已知连续函数，则取 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的薄片体积用底面积为 $A(x)$、高为 $\mathrm{d}x$ 的小圆柱体的体积来近似，即体积元素

$$\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$$

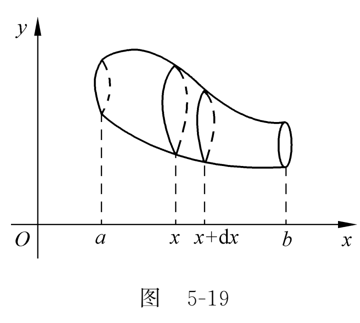


图　5-19

故所求立体的体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

例 5.4.8 一个平面经过半径为 R 的圆柱体的底面圆的中心,并与底面交角为 α,计算这个平面截该圆柱体所得立体的体积(见图 5-20)。

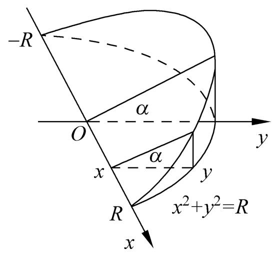


图 5-20

解 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴,底面上过圆中心且垂直于 x 轴的直线为 y 轴,则底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$,立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形,它的两条直角边的长分别为 y 及 $y=\tan\alpha$,即 $\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$,因而平行截面面积

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

故

$$\begin{aligned}V&=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\tan\alpha\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_{-R}^{R}=\frac{2R^3}{3}\tan\alpha\end{aligned}$$

5.4.4 平面曲线的弧长

设 A, B 是曲线弧上的两个端点,在弧 AB 上任取分点 $A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{i-1},M_i,\cdots,M_{n-1}$, $M_n=B$,并依次连接相邻的分点得一内接折线,当分点的数目无限增加且每个小段 $M_{i-1}M_i$ 都缩向一点时,如果此折线的长 $\sum\limits_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$ 的极限存在,则称此极限为曲线弧 AB 的弧长,并称此曲线弧 AB 是可求长的。

定理 5.4.1 光滑曲线弧是可求长的。

1. 直角坐标系情形

设曲线弧由方程 $y=f(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$ 给出,如图 5-21 所示,其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数,现在来计算这曲线弧的长度。取 x 为积分变量 $x\in[a,b]$,任取小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,其上的一段弧的长度用曲线在点 $(x,f(x))$ 处相应的小段长度来近似,即弧长元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

得直角坐标方程的弧长计算公式

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

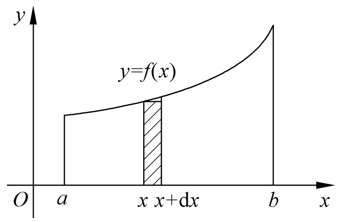


图　5-21

例 5.4.9　计算曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 那一段的弧长。

解　由弧长公式，有

$$S=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$$

2. 参数方程情形

设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant \beta$$

给出，而 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 都有连续导数，故弧长元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

则参数方程的弧长计算公式

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

例 5.4.10　求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(a>0)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长。

解　由弧长公式，有

$$S=\int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8a$$

5.4.5　在经济上的应用

前面介绍了导数的经济应用——边际函数，由于积分是微分的逆运算，所以定积分在经济中也有许多应用，用定积分由边际函数可求出总函数。

设固定成本为 C_0，边际成本为 $C'(Q)$，边际收益为 $R'(Q)$，其中 Q 为产量，在此假定产量与需求量和销量相同，则

$$总成本函数\ C(Q)=\int_0^Q C'(t)\mathrm{d}t+C_0$$

$$总收益函数\ R(Q)=\int_0^Q R'(t)\mathrm{d}t$$

$$总利润函数\ L(Q)=\int_0^Q [R'(t)-C'(t)]\mathrm{d}t-C_0$$

例 5.4.11 若某厂生产产品的边际成本为产量 Q 的函数 $C'(Q)=Q^2-4Q+6$,固定成本为 $C_0=200$ 百元,且每单位产品的售价为 $p=146$ 百元,并假定生产出的产品全部售出,求:

(1) 总成本函数 $C(Q)$;

(2) 产量从 2 个单位增加到 4 个单位时的成本变化量;

(3) 产量为多少时总利润最大?并求最大利润。

解 (1) 总成本函数

$$\begin{aligned}C(Q)&=\int_0^Q C'(t)\mathrm{d}t+C_0\\&=\int_0^Q (t^2-4t+6)\mathrm{d}t+200\\&=\frac{Q^3}{3}-2Q^2+6Q+200\end{aligned}$$

(2) 成本变化量 $\Delta C=\int_2^4 C'(t)\mathrm{d}t=\int_2^4 (t^2-4t+6)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-2t^2+6t\right)\Big|_2^4=\frac{20}{3}$,或 $\Delta C=C(4)-C(2)=\frac{20}{3}$。

(3) 总收益函数 $R(Q)=pQ=146Q$,总利润函数

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{Q^3}{3}+2Q^2+140Q-200$$

令 $L'(Q)=0$,得 $Q_1=14$,$Q_2=-10$(舍去),而

$$L''(Q)=-2Q+4,\quad L''(14)<0$$

因此,当 $Q=14$ 时,总利润最大

$$L_{\max}=L(14)=\frac{3712}{3}$$

即当产量为 14 个单位时,利润达到最大,为 $\frac{3712}{3}$ 百元。

习题 5.4

1. 求下列各组曲线所围成的图形的面积。

(1) $y=x^2$,$x=y^2$;

(2) $y=x^2$,$y=2-x^2$;

(3) $y=\frac{1}{x}$,$x=1$,$x=\mathrm{e}$,x 轴;

(4) $y=\frac{1}{x}$,$y=x$,$x=2$;

(5) $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$；

(6) $y=\ln x$，y 轴，$y=\ln a, y=\ln b$

2. 求下列曲线所围成的图形的面积。

(1) $r=a\cos 3\theta$；　　(2) $r=2a\cos\theta$；

(3) $\rho=2a(2+\cos\theta)$；　　(4) $\rho=a(1-\cos\theta)$

3. 求下列各曲线所围成的图形，按照指定的轴旋转所生成的旋转体的体积。

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴

(2) $y=x^3, x=2, y=0$，绕 x 轴

(3) $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi), y=0$，绕 x 轴

(4) $y=\arcsin x, x=1, y=0$，绕 x 轴

4. 计算由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱，直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积。

5. 计算由星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

6. 求下列各曲线的弧长。

(1) 曲线 $y=\ln x$ 相应于$\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$的一段弧；

(2) 曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧。

7. 计算悬链线 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$从 $x=-a$ 到 $x=a(a>0)$间的一段弧长。

8. 计算由星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$的全长。

9. 设一种商品每天生产 x 单位时固定成本为 20 元，边际成本函数 $C'(x)=0.4x+2$，求总成本函数 $C(x)$；如果该商品的单价为 18 元，且产品可以全部售出，求总利润函数 $L(x)$，并求每天生产多少商品才能获得最大利润。

10. 某产品生产 x 个单位时，边际收益函数为 $R'(x)=200-\dfrac{x}{100}$(元/单位)，

(1) 求生产 50 个单位时的总收益；

(2) 如果已经生产了 100 单位，求再生产 100 单位的总收益。

5.5　广义积分

我们前面的定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 是在下述条件下讨论的：

(1) 积分区间 $[a,b]$ 有限；

(2) 被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

但在一些实际问题及理论研究中，常常会遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数为

无界函数的积分。因此,我们对定积分加以推广,引入广义积分的概念。

5.5.1 无穷限的广义积分

定义 5.5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续,取 $b>a$,如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在,

则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分,记作 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

如果上述极限不存在,函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义,此时称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

类似地,我们可以定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 的广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若等式右边极限存在,则称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则,则称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的广义积分为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

若等式右边两个广义积分都收敛,则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则,只要有一个发散,则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

在计算广义积分时,为书写简便,通常将 $\lim\limits_{b\to+\infty}F(x)\Big|_a^b$ 简记为 $F(x)\Big|_a^{+\infty}$,其中 $F(+\infty)$ 应为 $\lim\limits_{b\to+\infty}F(x)$,即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$

上述方法同样适用于定积分计算。

例 5.5.1 计算下列广义积分。

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=-\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1\right)=1$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \arctan x \Big|_{-\infty}^{0} + \arctan x \Big|_{0}^{+\infty}$$
$$= (\arctan 0 - \lim_{x\to-\infty} \arctan x) + (\lim_{x\to+\infty} \arctan x - \arctan 0)$$
$$= \pi$$

例 5.5.2　计算下列广义积分。

(1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$；　　(2) $\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx$；

(3) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$

解　(1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{de^x}{1+e^{2x}} dx = \arctan e^x \Big|_{-\infty}^{0}$

$$= \arctan e^0 - \lim_{x\to-\infty} \arctan e^x = \frac{\pi}{4}$$

(2) $\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x de^{-x} = -\left(x e^{-x} \Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx\right)$

$$= -\left[(\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} - 0) + e^{-x} \Big|_{0}^{+\infty} \right] = 1$$

其中，$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$。

(3) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$

$$= \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$
$$= \ln \left|\frac{x}{x+1}\right| \Bigg|_{1}^{+\infty}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln \left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

例 5.5.3　证明广义积分 $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$，$a>0$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

证明　当 $p=1$ 时，$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{1}{x} \Big|_{a}^{+\infty}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln a = +\infty$$

当 $p\neq 1$ 时，$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{a}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \frac{1}{p-1} a^{1-p}, & p>1 \end{cases}$

因此，当 $p>1$ 时，广义积分 $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛，其值为 $\frac{1}{p-1} a^{1-p}$；当 $p\leqslant 1$ 时，广义积分 $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散。

5.5.2　无界函数的广义积分

定义 5.5.2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界，取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分,记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

如果上述极限不存在,此时称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

类似地,函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的广义积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

若右边极限存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)\cup(c,b]$ 上的广义积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

若右边两个广义积分都收敛,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则,右边只要有一个发散,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

在计算积分时,为书写简便,可采用如下简记形式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=[\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)]+[F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x)]\end{aligned}$$

例 5.5.4 计算下列广义积分。

(1) $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^2 \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\infty$,即在 $x=0$ 的右邻域内无界,所以此为广义积分,于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x&=x\ln x\big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}\ln x\\&=(0-\lim_{x\to 0^+}x\ln x)-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=-x\Big|_0^1=-1\end{aligned}$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\infty$,即在 $x=2$ 左邻域内无界,所以此为广义积分,于是

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-x^2)$$
$$= -(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^2 = 2$$

例 5.5.5　考察广义积分$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$ 的敛散性。

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$，即在 $x=0$ 的邻域内无界，所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

由于

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0 = -\left[\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-(-1)\right] = +\infty$$

即广义积分$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$ 发散，故广义积分$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$ 发散。

注意：如果疏忽了被积函数在 $x=0$ 的邻域内无界，就会得到以下错误的结果：

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

例 5.5.6　证明广义积分$\int_0^a \frac{1}{x^q}dx$，$a>0$，当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散。

证明　当 $q=1$ 时

$$\int_0^a \frac{1}{x^q}dx = \int_0^a \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_0^a = \ln a - \lim_{x\to 0^+}\ln x = \infty$$

当 $q\neq 1$ 时，

$$\int_0^a \frac{1}{x^q}dx = \frac{1}{1-q}x^{1-q}\Big|_0^a = \begin{cases}\infty & q>1\\ \frac{1}{1-q}a^{1-q} & q<1\end{cases}$$

因此，当 $q<1$ 时，广义积分$\int_0^a \frac{1}{x^q}dx$ 收敛，其值为$\frac{1}{1-1}a^{1-q}$；当 $q\geqslant 1$ 时，广义积分$\int_0^a \frac{1}{x^q}dx$ 发散。

习题 5.5

计算下列广义积分。

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$；　　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$；

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$；

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$　　(6) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$；

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$　　(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$；

(9) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(10) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

(11) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$

第 5 章习题参考答案

习题 5.1

1. (1) $\frac{3}{2}$；(2) $\frac{5}{2}$；

(3) $\frac{\pi}{4}$；(4) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

2. (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 较大；(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 较大；

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 较大；(4) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 较大；

(5) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 较大；(6) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 较大

3. (1) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant 51$；(2) $\frac{3}{\mathrm{e}^4}\leqslant\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant 3$

4. 略

习题 5.2

1. (1) $\sin x^2$；(2) $-\mathrm{e}^{-\cos x}\cdot\sin x$；(3) $\frac{2x}{1+\sin^2(x^2)}-\frac{1}{1+\sin^2 x}$；

(4) x；(5) $-\frac{2\sin x}{x}$

2. (1) $\frac{1}{18}$；(2) 0；(3) 0；(4) 1；(5) $\frac{1}{2}$

3. (1) $\frac{14}{3}$；(2) $\mathrm{e}-1$；(3) $\frac{99}{2\ln 10}$；(4) $\frac{1}{101}$；(5) 1；(6) $-2\ln 2$；(7) 4；(8) $\mathrm{e}^{\pi}-3$；

(9) $\frac{62}{5}+2\ln 2$；(10) 4；(11) 1；(12) $\frac{\pi}{4}$；(13) $\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{12}$；(14) $\frac{\pi}{2}-1$

4. $\frac{14}{3}$

5. 1

习题 5.3

1. (1) $\frac{1}{101}$；(2) $\frac{51}{512}$；(3) 0；

(4) $\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$；(5) $\frac{1}{4}$；(6) $\frac{1}{2}$；

(7) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$；(8) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$；(9) $2(\sqrt{3}-1)$；

(10) $\frac{3}{16}\pi^2$；(11) $\frac{1}{6}$；(12) $1-2\ln 2$；

(13) $2\ln 2-1$；　(14) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

2. (1) $1-\frac{2}{e}$；　(2) $-\frac{\pi}{2}$；　(3) $\frac{1}{4}(e^2+1)$；

(4) $\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$；　(5) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$；　(6) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$；

(7) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$；　(8) $\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$

3. (1) $\frac{\pi^3}{324}$；　(2) 0；　(3) 0；

(4) $\frac{\pi}{2}$

4. $1+\ln(1+e^{-1})$

习题 5.4

1. (1) $\frac{1}{3}$；　(2) $\frac{8}{3}$；　(3) 1；　(4) $\frac{3}{2}-\ln 2$；

(5) $e+\frac{1}{e}-2$；　(6) $b-a$

2. (1) $\frac{\pi}{4}a^2$；　(2) πa^2；　(3) $18\pi a^2$；　(4) $\frac{3}{2}\pi a^2$

3. (1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$；　(2) $\frac{128}{7}\pi$；　(3) $\frac{1}{2}\pi^2$；　(4) $\frac{\pi^3}{4}-2\pi$

4. $V_x=5\pi^2a^3$，　$V_y=6\pi^3a^3$

5. $\frac{32\pi}{105}a^3$

6. (1) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$；　(2) $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$

7. e^a-e^{-a}

8. $6a$

9. $L(x)=-0.2x^2+16x-20$，　40

10. (1) 9987.5；　(2) 19850

习题 5.5

计算下列广义积分：

(1) $\frac{1}{2}$；(2) $+\infty$；(3) $1-\frac{\pi}{4}$；(4) $\frac{1}{2}$；(5) $+\infty$；(6) $+\infty$；(7) $\frac{1}{2}$；(8) π；(9) 1；

(10) $\frac{\pi}{2}$；(11) $\frac{\pi}{2}$；(12) -2

参 考 文 献

［1］ 赵利彬.高等数学［M］.上海：同济大学出版社，2010.

［2］ 邓可，孔德斌，叶万红.高等数学［M］.长春：吉林大学出版社，2014.

［3］ 同济大学数学系.高等数学［M］.北京：高等教育出版社，2007.

［4］ 隋如彬.微积分［M］.北京：科学出版社，2012.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036